



Université de la Réunion

**MEMOIRE DE MATHEMATIQUES**

SUJET : OPTIMISATION VECTORIELLE

TECHER Jean David et BIZAMBA Régis

Année 2000-2001

**Soutenance de mémoire effectuée le Jeudi 14 Juin 2001, Université de la Réunion**

Directeur de recherche : H. BONNEL, HDR.

En présence de : D. GOELEVELLEN, Y. DUMONT, H. BONNEL, P. CHARTON, VINCENT, M. ROCHDI

Appréciation du jury : Sujet original

Note : 17/20

**Remerciements :**

*A Monsieur BONNEL Henri, HDR  
Pour son soutien, sa confiance et son aide qui nous a été très précieuse.  
Université de la Réunion  
Année 2000-2001*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction à l'optimisation vectorielle</b>	<b>1</b>
1.1	L'optimisation en mathématiques . . . . .	1
1.1.1	Optimisation monocritère . . . . .	1
1.1.2	Optimisation multicritère . . . . .	2
1.2	Définition abstraite d'un problème d'optimisation vectorielle . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Relations de préférence et cônes convexes dans un espace vectoriel réel</b>	<b>4</b>
2.1	Relation de préférence et espace vectoriel préordonné . . . . .	4
2.2	Relations de préférence et cônes convexes . . . . .	5
2.2.1	Cônes, Convexes. . . . .	5
2.2.2	Lien entre relations de préférence et cônes convexes . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Solutions d'un problème d'optimisation vectorielle</b>	<b>10</b>
3.1	Solutions efficaces . . . . .	10
3.2	Solutions idéales, faiblement et proprement efficaces . . . . .	12
3.2.1	Solution idéale . . . . .	12
3.2.2	Solution faiblement efficace . . . . .	13
3.2.3	Solution proprement efficace . . . . .	13
3.2.4	Relation entre les différents types de solutions . . . . .	14
3.3	Existence de solutions . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Scalarisation pour un problème convexe</b>	<b>21</b>
4.1	Les outils de base pour la scalarisation . . . . .	21
4.1.1	Le théorème de séparation géométrique de Hahn-Banach . . . . .	21
4.1.2	Le théorème de Karush-Kuhn-Tucker (cas scalaire) . . . . .	22
4.2	Scalarisation d'un problème convexe . . . . .	23
4.3	Application : Etude d'un problème . . . . .	29
4.3.1	Les données du problème. . . . .	29
4.3.2	Exemple . . . . .	30
4.3.3	Récapitulatif . . . . .	35
<b>A</b>	<b>Les grands personnages de l'optimisation vectorielle</b>	<b>38</b>
A.1	PARETO Vilfredo Federico Damaso(1848-1923) . . . . .	38
A.1.1	sa biographie . . . . .	38
A.2	EDGEWORTH Francis Isidoro (1845-1926) . . . . .	39
A.2.1	biographie . . . . .	39

# Chapitre 1

## Introduction à l'optimisation vectorielle

Dans notre vie de tous les jours, nous sommes souvent confrontés à faire des choix. Ces choix apparaissent dans de nombreuses situations : personnelle, familiale, économique...Mais quelque soit cette situation, nous cherchons toujours (et c'est dans notre nature) à faire le meilleur choix<sup>1</sup>. Mais bien souvent, rien ne garantit que ce meilleur choix existe<sup>2</sup>!

Mais alors est-il possible de faire un bon choix dans le sens où on prenne une décision pour laquelle on aurait pu trouver mieux et de ne pas se le reprocher une fois ce choix fait ?

L'objectif de l'optimisation est justement de tenter de trouver une réponse à ce délicat problème. Dans le cadre de notre mémoire, au point de vue mathématiques, nous allons justement aborder la situation suivante, à laquelle nous sommes confrontés :

### 1.1 L'optimisation en mathématiques

Pour fixer les idées, nous aborderons dans un cadre abstrait les formulations de différents problèmes. Pour la suite,  $X$  désigne un ensemble non vide<sup>3</sup>

#### 1.1.1 Optimisation monocritère

Considérons dans un premier temps le problème suivant à un seul critère, appelé problème monocritère. Celui-ci consiste à minimiser une fonction  $F : D_F \subset X \rightarrow \mathbb{R}$  sur un ensemble  $S \subset D_F$ . On écrit de manière formelle :

$$(OS) \quad \underset{x \in S}{\text{Min}} F(x)$$

Un élément  $x^* \in S$  est appelé **solution optimale** du problème (OS) si :  $\forall x \in S, F(x^*) \leq F(x)$ . L'ensemble de toutes les solutions optimales de (OS) sera noté **argmins F**.

Cette définition repose sur l'existence de la relation d'ordre totale  $\leq$  de  $\mathbb{R}$  : on peut toujours comparer deux éléments de  $S$  dans l'ensemble d'arrivée de  $F$ <sup>4</sup> (ici deux réels).

De ce fait, la relation d'ordre de  $\mathbb{R}$  garantit qu'une solution optimale représente parmi tous les

---

<sup>1</sup>cette notion de *meilleur choix* n'a en fait qu'un sens relatif. Il est préférable de considérer ce terme au sens de *c'est le choix idéal auquel on aspire*, bien que cette définition puisse ne pas répondre pas aux contraintes de la vie réelle.

<sup>2</sup>si un tel choix s'avère utopiste, on se contentera des choix et possibilités de la vie réelle qui nous sont accessibles.

<sup>3</sup>un espace vectoriel normé par exemple mais la structure de l'ensemble  $X$  peut-être beaucoup plus générale.

<sup>4</sup>si  $x_1, x_2 \in S$ , on a  $F(x_1) \leq F(x_2)$  ou  $F(x_2) \leq F(x_1)$ .

éléments de  $S$ , la (une des) meilleure(s) solution(s). En revanche pour le problème suivant, la situation est beaucoup plus complexe.

### 1.1.2 Optimisation multicritère

Prenons pour l'instant deux fonctions  $F_1, F_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Nous conservons toujours le même ensemble  $S$  que précédemment. Si on pose  $F = (F_1, F_2) : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ , on peut considérer le problème suivant :

$$(OB) \quad \underset{x \in S}{\text{Min}} F(x)$$

appelé problème bicritère. Comme pour le problème précédent, nous devons munir l'ensemble d'arrivée  $\mathbb{R}^2$  d'une relation d'ordre. Pour cela prenons donc l'ordre<sup>5</sup> naturel de  $\mathbb{R}^2$ , notée  $\preceq$  définie par :

$$\forall y = (y_1, y_2), \forall z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : y \preceq z \iff y_i \leq z_i \text{ pour } i = 1, 2$$

Mais à la différence de l'ordre  $\leq$  de  $\mathbb{R}$ , l'ordre n'est pas total *i.e.* il existe des éléments de  $\mathbb{R}^2$  qui ne sont pas comparables, par exemple  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$ .

Par rapport au problème monocritère, (comme pour tout problème de mathématiques) notre tâche maintenant consiste à définir une solution du problème (OB). Une des idées les plus simples consiste à définir une telle solution comme nous l'avons fait pour le problème précédent :

$$x^* \text{ est solution du problème (OB)} \iff x^* \in S \text{ et } \forall x \in S, F(x^*) \preceq F(x)$$

Mais comme nous l'avons annoncé au début de ce chapitre, cette définition n'est pas réaliste<sup>6</sup>, dans la mesure où pour un problème multicritère, une telle solution n'existe pas.

On parle alors de **solution idéale** (ou encore **solution utopique**). Par conséquent au lieu de rechercher une solution (qui risque de ne pas exister) il est plus sage de définir une solution  $x^* \in S$  pour le problème (OB) comme étant une solution pour laquelle on ne peut pas trouver mieux !

Une telle définition et les termes *on ne peut pas trouver mieux que  $x^* \in S$*  sont à prendre au sens suivant :

Parmi tous les éléments  $x \in S$  avec lesquels  $x^*$  est comparable<sup>7</sup>, il n'existe pas de  $\bar{x} \in S$  tel que  $F(\bar{x}) \preceq F(x^*)$  et  $F(\bar{x}) \neq F(x^*)$ .

Cette définition revient à dire que :  $\forall x \in S, F(x) \preceq F(x^*) \implies F(x) = F(x^*)$ . On parle alors de **solution de Pareto**<sup>8</sup>. La généralisation de cette définition ayant un nombre quelconque (fini ou infini) de critères est alors évidente.

## 1.2 Définition abstraite d'un problème d'optimisation vectorielle

**Définition 1.1.** Dans le langage spécifique de l'optimisation vectorielle, un problème d'optimisation vectorielle est défini par les éléments suivants :

<sup>5</sup>on vérifie facilement que cette relation est une relation d'ordre : réflexive, antisymétrique et transitive.

<sup>6</sup>l'ensemble de telles solutions est généralement vide, puisqu'il s'agit de  $\cap_{i=1}^2 \text{argmin } F_i$ . Pour illustrer ce cas, prenons par exemple  $X = S = \mathbb{R}$ , et  $F_1(x) = \cos x$ ,  $F_2(x) = \sin x$ . Les ensembles  $\text{argmin } F_1 = \{\pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$  et  $\text{argmin } F_2 = \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$  ont une intersection vide.

<sup>7</sup> $F(x) \preceq F(x^*)$  ou  $F(x^*) \preceq F(x)$

<sup>8</sup>Nous verrons plus tard qu'une telle solution est un cas particulier d'une solution de Pareto. Le lecteur pourra trouver la biographie de Pareto (1848-1923) dans l'annexe de ce mémoire.

- **X : l'ensemble de décisions (ou alternatives)** C'est l'ensemble qui contient toutes les variables, les choix possibles que le (ou les) décideurs<sup>9</sup> maîtrisent par un facteur de décision.

- **S : l'ensemble admissible** C'est un ensemble  $S \subset X$  dont les éléments  $x \in S$  sont appelés **solutions admissibles** Il peut arriver que parmi les choix  $x \in X$  que l'on doit prendre, certains choix ne correspondent pas à nos exigences ou aux contraintes auxquelles nous sommes confrontés. Ces solutions sont donc rejetées. Les solutions admissibles sont celles qui y répondent.

- **Y : l'espace des objectifs** Il contient les valeurs de toutes les performances. On le munit d'une relation de préordre partielle ( voir remarque ci-dessous ) notée  $\preceq$  qu'on appelle **relation de préférence**. L'écriture  $y_1 \preceq y_2$  signifie que  $y_1$  est **préférée** à  $y_2$ .

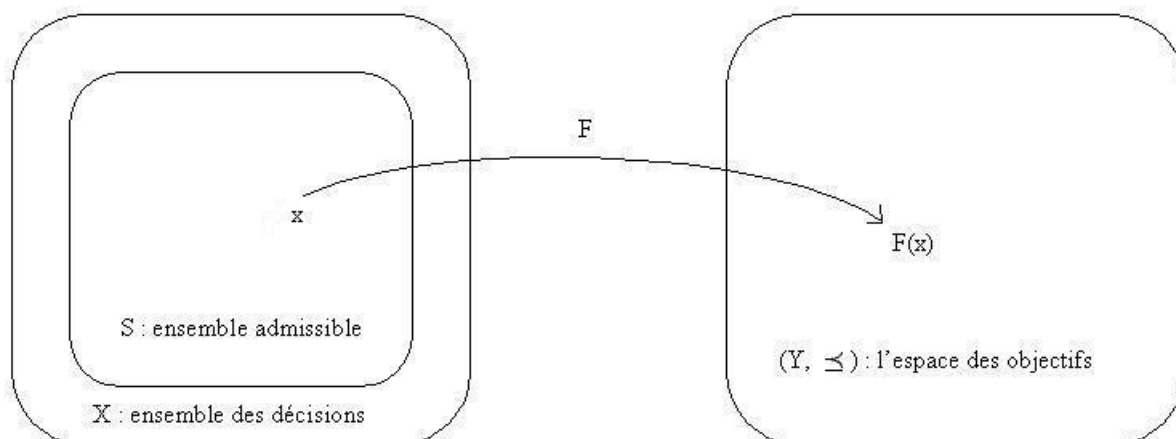
- **le critère de performance**, une application  $F^{10}: X \rightarrow Y$ . L'image par  $F$  d'une solution admissible  $x \in S$ ,  $F(x)$  est appelée **performance** réalisée par  $x$ .

**Remarque 1.1.** La notion de relation de préordre partielle sera vue au chapitre suivant.

Un problème d'optimisation vectorielle est la donnée de ces 5 éléments, noté  $(X, S, Y, \preceq, F)$ . On écrit formellement :

$$\preceq \underset{x \in S}{\text{Minimiser}} F(x)$$

Un schéma d'optimisation se présente ainsi :



Dans la suite de notre mémoire, pour obtenir des résultats mathématiques intéressants, nous supposons que  $X$  et  $Y$  sont des espaces vectoriels normés réels (**evn**). Nous nous limiterons à l'étude de problème d'optimisation convexe.

Le prochain chapitre porte sur l'étude des relations de préférence dans les espaces vectoriels réels. Nous verrons aussi que la structure linéaire de ces espaces nous permettra de caractériser géométriquement l'écriture pour deux solutions admissibles  $x_1, x_2$  pour lesquels  $F(x_1) \preceq F(x_2)$  *i.e.*  $F(x_1)$  est préférée à  $F(x_2)$ .

---

<sup>9</sup>en optimisation, c'est une personne ou des personnes qui sont amenés à prendre des choix, établir des décisions selon la situation à laquelle ils sont confrontés. Cela peut être par exemple des chefs d'entreprise qui doivent faire des choix en ce qui concerne le budget à investir pour l'élaboration d'un produit etc ...

<sup>10</sup>pour en revenir à l'exemple des chefs d'entreprise, on peut par exemple poser  $F = (F_1, F_2)$  avec  $F_1 =$  coût de production du produit,  $F_2 =$  temps de fabrication du produit

# Chapitre 2

## Relations de préférence et cônes convexes dans un espace vectoriel réel

Dans ce chapitre, nous verrons que sous certaines hypothèses portant sur la relation de préférence  $\preceq$  et sur la structure de l'espace des objectifs  $Y$ , au lieu de travailler avec le couple  $(Y, \preceq)$  on peut considérer un autre couple  $(Y, C)$  ( $C$  un cône convexe de  $Y$ ).

### 2.1 Relation de préférence et espace vectoriel préordonné

Soit  $Y$  un espace vectoriel réel (**evr**).

**Définition 2.1.** La donnée d'une **relation binaire**  $\preceq$  sur l'ensemble  $Y$  est la donnée d'un sous-ensemble  $R$  de  $Y \times Y$ , c'est-à-dire sur les couples  $(x, y)$  où  $x \in Y$  et  $y \in Y$ .

L'ensemble  $R$  est appelé le graphe de la relation  $\preceq$ . Souvent on confond les relations et les graphes. On note :

$$\forall x, y \in Y : x \preceq y \iff (x, y) \in R$$

**Définition 2.2.** Une **relation de préférence** sur l'espace des objectifs  $Y$ , est une relation binaire  $\preceq$  de préordre c'est-à-dire  $\preceq$  est :

– réflexive :

$$\forall x \in Y : x \preceq x.$$

– transitive :

$$\forall x, y, z \in Y : x \preceq y, y \preceq z \implies x \preceq z$$

Si de plus  $\preceq$  est antisymétrique :

$$\forall (x, y) \in Y^2 : x \preceq y, y \preceq x \implies x = y$$

on dit alors que la relation de préférence est une relation d'ordre.

La relation de préférence est dite :

– totale si deux éléments quelconques de  $Y$  sont en relation :

$$\forall x, y \in Y, \text{ on a } x \preceq y \text{ ou } y \preceq x$$

– partielle s'il existe des éléments qui ne sont pas en relation :

$$\exists x, y \in Y, \text{ pour lesquels on a ni } x \preceq y, \text{ ni } y \preceq x$$



**Définition 2.3.** Le couple  $(Y, \preceq)$  s'appelle **espace vectoriel préordonné** (respectivement **ordonné**) si  $\preceq$  est un préordre (respectivement ordre) partiel compatible avec la structure linéaire *i.e.* vérifiant :

$$\forall y, u, v \in Y, \quad y \preceq u \implies y + v \preceq u + v \quad (2.1)$$

$$\forall(\alpha, y, u) \in \mathbb{R}_+ \times Y^2, \quad y \preceq u \implies \alpha y \preceq \alpha u \quad (2.2)$$

Un tel couple sera noté **evp** (respectivement **evo**).

Voici deux exemples de relations de préférence :

**Exemple 2.1.** Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. Considérons  $Y = \mathbb{R}^n$ . Munissons  $Y$  de la relation binaire  $\preceq$  suivante :

$$\forall y = (y_1, \dots, y_n), y' = (y'_1, \dots, y'_n) \in \mathbb{R}^n, \quad y \preceq y' \Leftrightarrow y_i \leq y'_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

La réflexivité, la transitivité et l'antisymétrie de  $\preceq$  résultent respectivement de la réflexivité, de la transitivité et de l'antisymétrie de la relation d'ordre  $\leq$  appliquée aux composantes des éléments  $y = (y_1, \dots, y_n)$  de  $Y$ . C'est donc une relation d'ordre (préordre en particulier). Mais la relation  $\preceq$  n'est pas totale, il suffit de prendre par exemple les éléments  $(1, 0, \dots, 0)$  et  $(0, \dots, 0, 1)$ . La relation  $\preceq$  est bien une relation de préordre partielle.

**Exemple 2.2.** Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. Considérons  $Y$  l'espace vectoriel des matrices symétriques  $n \times n$  réelles. On munit  $Y$  de la relation binaire  $\preceq$  suivante :

$$\forall A = (A_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}, B = (B_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in Y : \quad A \preceq B \iff \text{Trace}(A) \leq \text{Trace}(B)$$

avec  $\text{Trace}(A) := \sum_{i=1}^{i=n} A_{ii}$ . On vérifie aisément que  $\preceq$  est réflexive, transitive. Mais elle n'est pas antisymétrique. Prenons par exemple les matrices :

$$A = \begin{cases} 4 & \text{si } i = j \\ 3 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \text{et} \quad B = \begin{cases} 4 & \text{si } i = j \\ 2 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \text{on a } A \preceq B \preceq A \text{ mais } A \neq B$$

## 2.2 Relations de préférence et cônes convexes

Nous avons besoin de quelques définitions et notations pour continuer :

### 2.2.1 Cônes, Convexes.

Pour les définitions suivantes,  $C \subset Y$  est un ensemble non vide.

**Définition 2.4.**  $C$  est appelé **un cône de sommet 0** si  $\mathbb{R}_+ C \subset C$  *i.e.*

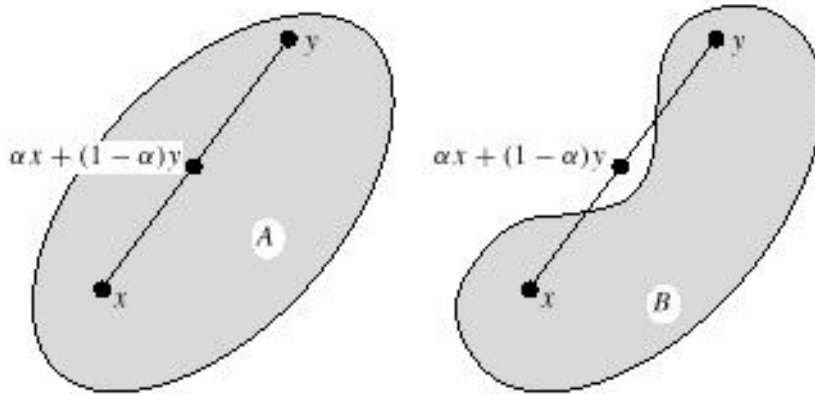
$$\forall(\alpha, x), \quad \alpha \in [0, +\infty[, \quad x \in C \implies \alpha x \in C$$

**Remarque 2.1.** On dit que  $C$  est **un cône de sommet a** avec  $a \in Y$  si l'ensemble  $C - a$  est un cône de sommet 0. Pour ne pas être contraint de dire “ $C$  est un cône de sommet 0”, nous dirons tout simplement que  $C$  est un **cône**.

**Définition 2.5.**  $C$  est dit **convexe** si pour tout couple  $(x, y) \in C^2$  le segment

$$[x, y] := \{\alpha x + (1 - \alpha)y \mid \alpha \in [0, 1]\}$$

est inclu dans  $C$ .



Sur cet exemple  $A$  est convexe,  $B$  n'est pas convexe.

**Définition 2.6.** Supposons que  $C$  est un cône. La **linéarité** du cône  $C$  est l'ensemble

$$l(C) := C \cap (-C)$$

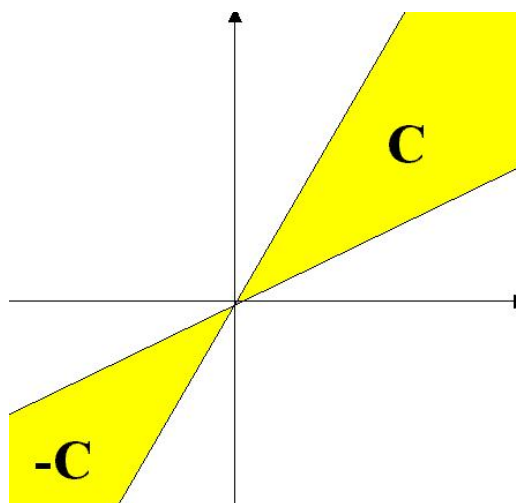
De plus si  $C$  est convexe, on dit que  $C$  est **saillant** si  $l(C)$  est réduit au vecteur nul de  $Y$  :

$$l(C) = \{0\}$$

c'est-à-dire :

$$\forall x, x \in C, -x \in C \implies x = 0$$

Exemple de cône convexe dans le plan :



Nous allons maintenant voir le :

## 2.2.2 Lien entre relations de préférence et cônes convexes

Nous avons aussi besoin des deux lemmes suivants. Le premier donne les caractéristiques d'un evp :

**Lemme 2.1.** Soit  $(Y, \preceq)$  un evp. Alors :

$$\forall y, u, w \in Y, y \preceq u, v \preceq w \implies y + v \preceq u + w \quad (2.3)$$

$$\forall(\alpha, y, u) \in \mathbb{R}_- \times Y^2, y \preceq u \implies \alpha u \preceq \alpha y \quad (2.4)$$

$$(\forall y \in Y, y \preceq 0, -y \preceq 0 \implies y = 0) \iff Y \text{ est un evo} \quad (2.5)$$

Preuve :

pour (2.3) : Soit  $y, u, w \in Y$  tel que  $y \preceq u, v \preceq w$ . Comme  $y \preceq u$  et  $v \preceq w$  alors grâce à (2.1) on a  $y + v \preceq u + v$  et  $u + v \preceq u + w$ , d'où le résultat par transitivité.

pour (2.4) : Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_-$  et  $y, u \in Y$  tel que  $y \preceq u$ . Comme  $-\alpha \in \mathbb{R}^+$ , grâce à (2.2) on a  $-\alpha y \preceq -\alpha u$ . Grâce à (2.1), on obtient  $0 \preceq -\alpha u + \alpha y$  et de nouveau par (2.1), on obtient  $\alpha u \preceq \alpha y$

pour (2.5) :  $\implies$  Etant donné que  $Y$  est un evp, il suffit donc de vérifier l'antisymétrie de la relation pour que  $Y$  soit un evo. Soit donc  $y, u \in Y$  tel que  $u \preceq y$  et  $y \preceq u$ . Grâce à (2.1), on obtient  $u - y \preceq 0$  et  $-(u - y) = y - u \preceq 0$ . Cela implique alors que  $u - y = 0$  c'est-à-dire  $u = y$ .

$\Leftarrow$  Supposons que  $Y$  est un evo et que (2.4) a été démontré. Soit donc  $y \in Y$  tel que  $y \preceq 0$  et  $-y \preceq 0$ . De la deuxième relation en prenant  $u = 0$  et  $\alpha = -1$  et  $-y$  à la place de  $y$  dans (2.4), on obtient  $0 \preceq y$ . Ainsi  $y \preceq 0$  et  $0 \preceq y$ , par antisymétrie on a alors  $y = 0$ . ■

Le second lemme donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un cône soit convexe.

**Lemme 2.2.** Soit  $Y$  un evr et  $C$  un cône de  $Y$ . Alors :

$$C \text{ est convexe} \iff C + C \subset C \quad (2.6)$$

Preuve :

$\implies$  . On suppose que  $C$  est convexe. Montrons que  $C + C \subset C$ . Soit  $x, y \in C$ . Montrons que  $x + y \in C$

Il suffit de remarquer que l'on a :  $x + y = 2 \left( \frac{x + y}{2} \right)$ . Comme  $C$  est convexe  $\frac{x + y}{2} \in C$  et comme  $C$  est un cône  $x + y \in C$ .

$\Leftarrow$  On suppose que  $C + C \subset C$ . Montrons que  $C$  est convexe. Pour cela soit  $x, y \in C$  et  $t \in [0, 1]$ . Etant donné que  $(1 - t)x, ty \in C$  et que  $C$  est un cône donc  $(1 - t)x, ty \in C$ . Puisque  $C + C \subset C$ , on obtient que  $(1 - t)x + ty \in C$ . ■

Le lien entre relation de préférence et cône convexe est donné par la :

**Proposition 2.1.** Soit  $Y$  un evr.

1. Soit  $\preceq$  une relation de préférence compatible avec la structure linéaire de  $Y$ . Alors l'ensemble

$$C := \{y \in Y \mid 0 \preceq y\}$$

est un cône convexe.

Si de plus  $(Y, \preceq)$  est un evo alors  $C$  est un cône convexe saillant.

2. Soit  $C$  un cône convexe de  $Y$ . Alors la relation :

$$\forall x, y \in Y, x \preceq y \iff y - x \in C$$

est une relation de préférence compatible avec la structure linéaire de  $Y$ .  $(Y, \preceq)$  est un evp.

Si de plus le cône  $C$  est saillant alors  $(Y, \preceq)$  est un evo.

Preuve :

pour 1 :

Soit donc  $(Y, \preceq)$  un evp.

- $C$  est un cône. En effet soit  $y \in C$  et  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ . Comme  $0 \preceq y$  alors d'après (2.2) on a  $0 \preceq \alpha y$  donc  $\alpha y \in C$ . On a ainsi  $\mathbb{R}_+ C \subset C$ .
- $C$  est convexe. D'après le lemme 2.2, il suffit de montrer que  $C + C \subset C$ . Soit alors  $x, y \in C$ . Comme  $0 \preceq x$  et  $0 \preceq y$  alors d'après (2.3), on a  $0 \preceq x + y$  c'est-à-dire  $x + y \in C$ .

Supposons maintenant que  $(Y, \preceq)$  soit un evo. La seule hypothèse à vérifier est que  $C$  est saillant. Soit alors  $y \in l(C)$  autrement dit  $y \in C$  et  $-y \in C$ . Ainsi comme  $0 \preceq y$  et  $0 \preceq (-y)$ , (2.4) entraîne alors (en prenant  $\alpha = -1$ )  $-y \preceq 0$  et  $y \preceq 0$ . D'où par de (2.5) on a  $y = 0$ . Donc  $l(C) = \{0\}$ .

pour 2 :

Soit donc  $C$  un cône convexe de  $Y$ . Montrons donc que  $(Y, \preceq)$  est un evp. Nous allons donc montrer respectivement que  $\preceq$  est réflexive, transitive et établir (2.1) et (2.2).

- la réflexivité de  $\preceq$  est immédiate.
- La relation  $\preceq$  est aussi transitive. En effet soit  $x, y, z \in Y$  tel que  $x \preceq y$  et  $y \preceq z$ . Comme  $C$  est convexe alors d'après (2.6),  $(z - x) = (z - y) + (y - x) \in C$ .
- Soit  $y, u, v \in Y$  tel que  $y \preceq u$ . On a  $u - y = (u + v) - (y + v) \in C$  donc  $(y + v) \preceq (u + v)$ . Ainsi (2.1) est établi.
- Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  et  $y, v \in Y$  tel que  $y \preceq u$ . On a donc  $u - y \in C$ . Comme  $C$  est un cône alors  $\alpha(u - y) = \alpha u - \alpha y \in C$  autrement dit  $\alpha y \preceq \alpha u$ . Ainsi (2.2) est établi.

Supposons maintenant que  $C$  est saillant et montrons que  $(Y, \preceq)$  est un evo. Pour cela, il suffit d'établir l'antisymétrie de  $\preceq$ . Soit alors  $y, u \in Y$  tel que  $y \preceq u$  et  $u \preceq y$ . On a donc respectivement  $u - y \in C$  et  $y - u \in C$ , autrement dit  $u - y \in C$  et  $-(u - y) \in C$  donc  $u - y \in l(C) = \{0\}$  puisque  $C$  est saillant. D'où  $u = y$ . ■

Reprenons les deux exemples de relations de préférence précédents.

**Exemple 2.3.** Reprenons la relation de préférence  $\preceq$  de l'exemple 2.1 avec  $Y = \mathbb{R}^n$ . On vérifie aisément qu'elle est compatible avec la structure linéaire de  $Y$ . On a alors

$$C = \{y = (y_1, \dots, y_n) \in Y \mid 0 \leq y_i \forall i = 1, \dots, n\} = \mathbb{R}_+^n$$

est un cône convexe saillant. Ce cône que nous aurons souvent l'occasion de rencontrer par la suite s'appelle le **cône de Pareto**.

**Exemple 2.4.** Reprenons la relation de préférence  $\preceq$  de l'exemple 2.2 avec  $Y$  l'ensemble des matrices symétriques  $n \times n$  réelles. Alors  $C = \{M \in Y \mid 0 \leq \text{Trace}(M)\}$  est un cône convexe.

Conséquences de la proposition :

Soit  $C$  un cône convexe de  $Y$ , induisant la relation de préférence de la proposition précédente. .

Etant donné que  $(Y, \preceq)$  est un evp, on écrira désormais :

- $(Y, C)$  à la place de  $(Y, \preceq)$
- $(X, S, Y, C, F)$  à la place de  $(X, S, Y, \preceq, F)$

Le prochain chapitre est consacré aux différentes solutions du problème d'optimisation. Nous verrons aussi que le cône  $C$  permet de caractériser géométriquement les différents types de solutions.

# Chapitre 3

## Solutions d'un problème d'optimisation vectorielle

- Dans ce chapitre, pour notre problème d'optimisation vectorielle  $(X, S, Y, C, F)$  nous considérons :
- $(Y, C)$  un evp, avec  $Y$  un evn et  $C \subset Y$  un cône convexe qui définit le préordre  $\preceq$  sur  $Y$ .
  - $X$  un evn.
  - $S \subset X$  une partie non vide.
  - $F$  une application de  $S$  dans  $Y$

### 3.1 Solutions efficientes

Pour continuer, nous avons besoin de la proposition suivante :

**Proposition 3.1.** Si  $C$  est un cône convexe dans l'evn  $Y$  avec  $C \neq Y$  alors :

$$\text{int } C + C \subset \text{int } C \quad (3.1)$$

$$\text{int } C \subset C \setminus l(C) \quad (3.2)$$

$$C_f := \text{int } C \cup \{0\} \text{ est un cône convexe saillant.} \quad (3.3)$$

Preuve :

Signalons tout d'abord que dans un evn  $Y$ , les applications  $y \mapsto a + y$  et  $y \mapsto \alpha y$  (avec  $a \in Y, \alpha \in \mathbb{R}^*$  fixés) sont des homéomorphismes (de  $Y$  dans lui même). On en déduit alors facilement que  $O$  est un ouvert de  $Y$  si et seulement si  $a + O$  et  $\alpha O$  sont des ouverts de  $Y$ .

• pour (3.1) :

Soient  $a \in \text{int } C$  et  $b \in C$ . Il existe donc  $O$  ouvert de  $Y$  tel que  $a \in O \subset C$ . Puisque  $C$  est un cône convexe alors d'après (2.6) on a donc que  $b + O \subset C$  et  $b + O$  est un ouvert contenant  $a + b$ . De ce fait,  $a + b \in \text{int } C$ .

• pour (3.2) :

Soit  $y \in \text{int } C$ . Il existe donc  $O$  ouvert de  $Y$  contenant 0 tel que  $y + O \subset C$ , donc  $y + O \subset \text{int } C$ . Si par l'absurde  $y \in l(C)$  donc  $-y \in C$  alors d'après (3.1) :  $O = \underbrace{(y + O)}_{\subset \text{int } C} + \underbrace{(-y)}_{\in C} \subset \text{int } C$ . Soit

maintenant  $z \in Y$ . Comme  $O$  est un voisinage ouvert de  $0 \in Y$ , la continuité de l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow Y, \alpha \mapsto \alpha z$  en  $\alpha = 0$  implique l'existence d'un nombre  $\beta > 0$  de sorte que  $] - \beta, \beta[$

voisinage ouvert de  $\alpha = 0$  vérifie :  $f([\alpha - \beta, \beta]) \subset O$ . En particulier, en prenant  $\alpha$  quelconque dans  $]0, \beta[$ , on a  $f(\alpha) = \alpha z \in O \subset C$ . Ainsi  $z = \frac{1}{\alpha}(\alpha z) \in C$ . Par conséquent,  $C = Y$ , ce qui est une contradiction avec l'hypothèse du lemme.

• pour (3.3) :

- $C_f$  est un cône. En effet soit  $a \in C_f$  et  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  :
  - Si  $a = 0$  ou  $\alpha = 0$  on a immédiatement que  $\alpha a = 0 \in C_f$ .
  - Si  $a \in C_f \setminus \{0\}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  alors comme  $a \in \text{int } C$  il existe donc  $O$  voisinage ouvert de  $a$  contenu dans  $C$ . Comme  $C$  est un cône, il en résulte que l'ouvert  $\alpha O$  est tel que  $\alpha a \in \alpha O \subset \alpha C \subset C$  donc  $\alpha a \in \text{int } C \subset C_f$ .
- Ayant  $C_f$  cône, la convexité de  $C_f$  s'obtient facilement en utilisant (3.1). En effet d'après (2.6), il suffit d'avoir  $C_f + C_f \subset C_f$ . Soit donc  $x, y \in C_f$  :
  - Si  $(x = 0 \text{ et } y \in \text{int } C)$  ou  $(x = 0 \text{ et } y = 0)$  alors on a  $x + y \in C_f$ .
  - Si  $x, y \in \text{int } C$  alors d'après (3.1) :  $x + y \in \text{int } C \subset C_f$
- $C_f$  étant convexe on a aussi  $l(C_f) = \{0\}$ . Si par l'absurde  $x \in l(C_f)$  tel que  $x \neq 0$  alors comme  $x, -x \in C_f$  donc  $x, -x \in \text{int } C$ . D'après (3.1) on a donc  $0 = x + (-x) \in \text{int } C$ . Or  $0 \in l(C)$  cela contredit (3.2). ■

Pour deux éléments  $y_1, y_2 \in Y$ , on rappelle que :

$$y_1 \preceq y_2 \iff y_2 - y_1 \in C \quad (3.4)$$

On considère les relations suivantes dites de préférence stricte. La première est définie par :

$$y_1 \prec y_2 \iff y_2 - y_1 \in C \setminus l(C) \quad (3.5)$$

et si  $\text{int } C \neq \emptyset$  on considère aussi la relation :

$$y_1 \prec\prec y_2 \iff y_2 - y_1 \in \text{int } C \quad (3.6)$$

Grâce à la proposition 3.1 en supposant que  $C \neq Y$  on a alors :

$$\forall y_1, y_2 \in Y, y_1 \prec\prec y_2 \implies y_1 \prec y_2 \implies y_1 \preceq y_2 \quad (3.7)$$

De manière générale si  $K$  est un cône convexe de l'evn  $Y$ , pour l'evp  $(Y, K)$  on utilisera les notations respectivement :  $\preceq_K, \prec_K, \prec\prec_K$  au lieu de  $\preceq, \prec, \prec\prec$ .

**Définition 3.1.** Une solution admissible  $x^* \in S$  est appelée **solution efficiente** si

$$\forall x \in S : F(x) \preceq F(x^*) \implies F(x^*) \preceq F(x) \quad (3.8)$$

L'image de  $x^*$  par  $F$  i.e.  $F(x^*)$  est appelé **point efficient** de  $F(S)$ .

L'ensemble des solutions efficientes est noté  $E(X, S, Y, C, F)$ .

L'ensemble des points efficientes est noté  $E(F(S), C)$ .

**Remarque 3.1.** Il est évident que :

$$E(X, S, Y, C, F) = F^{-1}(E(F(S), C)) \cap S$$

La proposition suivante permet de caractériser géométriquement un point efficient. Elle offre aussi un critère d'efficience pour une solution admissible  $x^*$ .

**Proposition 3.2.** Soit  $C$  un cône convexe de  $Y$  et  $x^*$  une solution admissible de  $S$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i)  $x^* \in E(X, S, Y, C, F)$

(ii) Il n'existe pas  $x \in S$  tel que  $F(x) \prec F(x^*)$

(iii)  $((F(x^*) - C) \cap F(S)) \subset (F(x^*) + l(C))$

Dans le cas où  $C$  est saillant, (i), (ii), (iii) deviennent :

(i)  $\forall x \in S : F(x) \preceq F(x^*) \implies F(x) = F(x^*)$

(ii) Il n'existe pas  $x \in S \setminus \{x^*\}$  tel que  $F(x) \preceq F(x^*)$

(iii)  $(F(x^*) - C) \cap F(S) = \{F(x^*)\}$

Preuve :

(i)  $\implies$  (ii) :

Soit, par l'absurde,  $x \in S$  tel que  $F(x) \prec F(x^*)$  alors d'après (3.7) on a aussi  $F(x) \preceq F(x^*)$ . Cela implique que d'après (3.8) que  $F(x^*) \preceq F(x)$ . Ainsi d'après (3.4) on a  $F(x) - F(x^*) \in C$  et  $-(F(x) - F(x^*)) \in C$  donc  $F(x^*) - F(x) \in l(C)$ . Ce qui est en contradiction avec  $F(x) \prec F(x^*)$  qui d'après (3.5) implique que  $F(x^*) - F(x) \in C \setminus l(C)$

(ii)  $\implies$  (iii) :

Soit  $x \in S$  tel que  $F(x) \in (F(x^*) - C) \cap F(S)$ . Il existe donc  $c \in C$  tel que  $F(x) = F(x^*) - c \in F(S)$ . Si  $c = F(x^*) - F(x) \in C \setminus l(C)$  alors d'après (3.5) on a que  $F(x) \prec F(x^*)$ . Ceci est en contradiction avec (ii) donc  $c \in l(C)$ . Par conséquent,  $F(x) \in F(x^*) + l(C)$ .

(iii)  $\implies$  (i) :

Il faut donc établir (3.8). Soit donc  $x \in S$  tel que  $F(x) \preceq F(x^*)$ . Il existe donc  $c \in C$  tel que  $c = F(x^*) - F(x)$ . Ainsi  $F(x) = F(x^*) - c \in (F(x^*) - C) \cap F(S)$ . Alors d'après (iii)  $F(x) \in F(x^*) + l(C)$ . Par conséquent,  $F(x) - F(x^*) \in l(C) \subset C$  et d'après (3.4) on a  $F(x^*) \preceq F(x)$ . (3.8) est donc établi donc  $x \in E(X, S, Y, C, F)$ . ■

**Remarque 3.2.** Si  $C$  est saillant les formulations (i), (ii), (iii) sont facilement vérifiées. Notons juste que dans le cas où  $C$  est saillant alors  $x \in E(X, S, Y, C, F) \iff F(x^*)$  est un élément minimal de  $F(S)$ .

## 3.2 Solutions idéales, faiblement et proprement efficientes

Soit  $x^* \in S$  une solution admissible.

### 3.2.1 Solution idéale

**Définition 3.2.** On dit que  $x^*$  est une **solution idéale** si :

$$\forall x \in S : F(x^*) \preceq F(x) \tag{3.9}$$

L'ensemble des solutions idéales se note  $I(X, S, Y, C, F)$ .

L'image de  $x^*$  par  $F$  i.e.  $F(x^*)$  est appelé **point idéal** de  $F(S)$ .

L'ensemble des points idéaux se note  $I(F(S), C)$ .

**Remarque 3.3.** Il est évident que :

$$I(X, S, Y, C, F) = F^{-1}(I(F(S), C)) \cap S$$



De plus on a l'équivalence :

$$x^* \in I(X, S, Y, C, F) \iff F(S) \subset (F(x^*) + C)$$

Enfin si le cône  $C$  est saillant, alors  $I(F(S), C)$  est formé par le plus petit élément de  $F(S)$ .

### 3.2.2 Solution faiblement efficiente

**Définition 3.3.** On dit que  $x^*$  est une **solution faiblement efficiente** si :

$$\nexists x \in S \text{ tel que } F(x) \prec\prec F(x^*) \quad (3.10)$$

L'ensemble des solutions faiblement efficientes se note  $E_f(X, S, Y, C, F)$ .

L'image de  $x^*$  par  $F$  i.e.  $F(x^*)$  est appelé **point faiblement efficient** de  $F(S)$ .

L'ensemble des points faiblement efficientes se note  $E_f(F(S), C)$ .

**Remarque 3.4.** Etant donné que  $C_f \setminus I(C_f) = \text{int } C$ , en appliquant proposition 3.2-(ii) au cône convexe  $C_f$ , cette définition revient donc à dire que :

$$x^* \in E_f(X, S, Y, C, F) \iff x^* \in E(X, S, Y, C_f, F)$$

La proposition suivante donne une caractérisation de la solution faiblement efficiente :

#### Proposition 3.3.

$$x^* \in E_f(X, S, Y, C, F) \iff (F(x^*) - \text{int } C) \cap F(S) = \emptyset \quad (3.11)$$

Preuve :

( $\implies$ ) Si par l'absurde  $(F(x^*) - \text{int } C) \cap F(S) \neq \emptyset$  alors il existe  $x \in S$  tel que  $F(x) \in (F(x^*) - \text{int } C)$ . Alors  $F(x^*) - F(x) \in \text{int } C$ . Ce qui contredit (3.10).

( $\impliedby$ ) Etant donné que  $(F(x^*) - \text{int } C) \cap F(S) = \emptyset$  alors  $\forall x \in S : F(x) \notin (F(x^*) - \text{int } C)$ . Autrement dit  $\forall x \in S : F(x^*) - F(x) \notin \text{int } C$ . Ce qui est conforme à (3.10). ■

### 3.2.3 Solution proprement efficiente

**Définition 3.4.** On dit que  $x^*$  est une **solution proprement efficiente** s'il existe  $K$  cône convexe de  $Y$  (dépendant de  $x^*$ ) tel que :

- $K \neq Y$
- $C \setminus I(C) \subset \text{int } K$
- $x^* \in E(X, S, Y, K, F)$

L'ensemble des solutions proprement efficientes se note  $E_p(X, S, Y, C, F)$ .

L'image de  $x^*$  par  $F$  i.e.  $F(x^*)$  est appelé **point proprement efficient** de  $F(S)$ .

L'ensemble des points proprement efficientes se note  $E_p(F(S), C)$ .

**Remarque 3.5.** On a alors :

$$E_p(X, S, Y, C, F) = F^{-1}(E_p(F(S), C) \cap S)$$

Si on considère l'ensemble

$$\Upsilon := \{K \subset Y \mid K \text{ est un cône convexe, } K \neq Y \text{ tel que } C \setminus I(C) \subset \text{int } K\}$$

alors on montre facilement que :

$$E_p(F(S), C) = \bigcup_{K \in \Upsilon} E(F(S), K)$$

Ainsi

$$F^{-1}(E_p(F(S), C)) = F^{-1}\left(\bigcup_{K \in \Upsilon} E(F(S), K)\right) = \bigcup_{K \in \Upsilon} F^{-1}(E(F(S), K))$$

d'où par intersection avec  $S$  :

$$E_p(X, S, Y, C, F) = \bigcup_{K \in \Upsilon} E(X, S, Y, K, F) \quad (3.12)$$

### 3.2.4 Relation entre les différents types de solutions

Pour la suite du chapitre, on va considérer les notations simplifiées :

- $E = E(X, S, Y, C, F)$
- $I = I(X, S, Y, C, F)$
- $E_f = E_f(X, S, Y, C, F)$
- $E_p = E_p(X, S, Y, C, F)$

On a les inclusions suivantes :

**Proposition 3.4.** Si  $(Y, C)$  est un evp, pour toute partie  $S \subset X$  non vide :

$$E_p \subset E \subset E_f \quad (3.13)$$

Si  $I \neq \emptyset$  alors

$$I = E \quad (3.14)$$

Preuve :

(a)  $E_p \subset E$  :

D'après (3.12) cela revient à montrer que  $\forall K \in \Upsilon : E(X, S, Y, K, F) \subset E$ . Soit donc  $K \in \Upsilon$  et soit  $x^* \in E(X, S, Y, K, F)$ . Il faut donc vérifier (3.8). Pour cela soit donc  $x \in S$  tel que  $F(x) \preceq F(x^*)$ . Donc  $F(x^*) - F(x) \in C$ . Si  $F(x^*) - F(x) \notin l(C)$  alors  $F(x^*) - F(x) \in C \setminus l(C) \subset \text{int } K \subset K \setminus l(K)$  (la dernière inclusion étant obtenue en appliquant (3.2) au cône convexe  $K$ ). Ainsi  $F(x^*) - F(x) \in K \setminus l(K)$  revient à dire que  $F(x) \prec_K F(x^*)$ . Donc  $x \in S$  tel que  $F(x) \prec_K F(x^*)$ , ce qui contredit  $x^* \in E(X, S, Y, K, F)$  (cf. appliquer proposition 3.2-(ii) au cône convexe  $K$ ). Ainsi  $F(x^*) - F(x) \in l(C)$  donc  $-(F(x^*) - F(x)) \in C$  donc d'après (3.4) on a  $F(x) \preceq F(x^*)$ . Comme (3.8) est vérifié,  $x^* \in E$ .

(b)  $E \subset E_f$  :

Soit  $x^* \in E$ . D'après proposition 3.2-(ii), comme il n'existe pas de  $x \in S$  tel que  $F(x) \prec F(x^*)$  cela équivaut à dire qu'il n'existe pas de  $x \in S$  tel que  $F(x^*) - F(x) \in C \setminus l(C)$ . Or d'après (3.1), comme  $\text{int } C \subset C \setminus l(C)$  donc il n'existe pas de  $x \in S$  tel que  $F(x^*) - F(x) \in \text{int } C$ . Ce qui est équivalent d'après (3.6) à : il n'existe pas de  $x \in S$  tel que  $F(x) \prec\prec F(x^*)$ . Ayant obtenu (3.10), on a donc  $x^* \in E_f$ .

(c)  $I = E$  :

On suppose donc  $I$  non vide. Si  $x^* \in I$  et  $x \in S$  tel que  $F(x) \preceq F(x^*)$  alors on a d'après (3.9) :  $F(x^*) \preceq F(x)$ . Ainsi  $I \subset E$ . Réciproquement soit  $x^* \in E$  et  $x \in I$ . Il en résulte toujours d'après (3.9) que  $F(x) \preceq F(x^*)$ . Ceci entraîne d'après (3.8) que  $F(x^*) \preceq F(x)$ . Comme pour tout  $y \in S$  on a  $F(x) \preceq F(y)$  d'où par transitivité de  $\preceq$ , pour tout  $y \in S$ , on a  $F(x^*) \preceq F(y)$ . D'où  $x^* \in I$ . ■

### 3.3 Existence de solutions

Ayant fourni les différents types de solutions, notre objectif maintenant est de s'assurer de leur existence. Les propriétés topologiques de  $C$  (dans l'evn  $Y$ ) et de  $S$  (dans l'evn  $X$ ) sont essentielles pour s'assurer que  $E \neq \emptyset$ .

On va noter  $Y^*$  le dual topologique de  $Y$ , c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires et continues sur  $Y$ .

**Définition 3.5.** Soit  $C \subset Y$  un cône convexe. On dit que  $C$  est **strictement supporté** s'il existe  $\lambda \in Y^* \setminus \{0\}$  tel que :

$$C \setminus l(C) \subset \{y \in Y \mid \lambda(y) > 0\}$$

ou

$$C \setminus l(C) \subset \{y \in Y \mid \lambda(y) < 0\}$$

**Remarque 3.6.** Signalons toutefois que  $\{y \in Y \mid \lambda(y) > 0\}$  et  $\{y \in Y \mid \lambda(y) < 0\}$  sont non vides. En effet, puisque  $\lambda$  n'est pas identiquement nulle, alors il existe  $x_0 \in Y$  tel que par exemple  $\lambda(x_0) > 0$ . Ainsi  $x_0 \in \{y \in Y \mid \lambda(y) > 0\}$  et  $-x_0 \in \{y \in Y \mid \lambda(y) < 0\}$

**Exemple 3.1.** Soit  $Y = \mathbb{R}^2$  et  $C = \mathbb{R}_+^2$  le cône de Pareto. Soit

$$\begin{aligned} \lambda : Y &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 2x + y \end{aligned}$$

Comme  $C$  est saillant, on a alors

$$C \setminus \{0\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y > 0\}$$

**Théorème 3.1 (Existence de solutions).** Soit  $X$  et  $Y$  deux evn,  $C \subset Y$  un cône convexe strictement supporté et  $S \subset X$  un compact. Soit  $F : S \longrightarrow Y$  une application continue. Alors  $E(X, S, Y, C, F) \neq \emptyset$ .

Preuve :

Soit  $\lambda \in Y^* \setminus \{0\}$  tel que par exemple

$$C \setminus l(C) \subset \{y \in Y \mid \lambda(y) > 0\}$$

On pose  $K := \{y \in Y \mid \lambda(y) > 0\} \cup \{0\}$ . On montre aisément que  $K$  est un cône convexe saillant. La démonstration se fait en deux étapes.

(a) Montrons que

$$E(X, S, Y, K, F) \subset E(X, S, Y, C, F)$$

On supposera bien sûr que  $E(X, S, Y, K, F) \neq \emptyset$ .

Soit donc  $x^* \in E(X, S, Y, K, F)$  et  $x \in S$  tel que  $F(x) \preceq F(x^*)$ . Si  $F(x^*) - F(x) \notin l(C)$  alors

$$F(x^*) - F(x) \in C \setminus l(C) \subset K \setminus \{0\} = K \setminus l(K)$$

Ainsi  $x \in S$  et  $F(x) \prec_K F(x^*)$ . Ce qui est en contradiction avec  $x^* \in E(X, S, Y, K, F)$  (cf. appliquer proposition 3.2-(ii) au cône  $K$ ). De ce fait, on a donc  $F(x^*) - F(x) \in l(C)$  autrement dit  $-(F(x^*) - F(x)) = F(x) - F(x^*) \in C$  donc  $F(x^*) \preceq F(x)$ . D'où  $x^* \in E(X, S, Y, C, F)$ .

(b) Grâce à cette inclusion, il suffit donc maintenant d'établir que

$$E(X, S, Y, K, F) \neq \emptyset$$

Supposons par l'absurde que  $E(X, S, Y, K, F) = \emptyset$ . Posons  $D := \{y \in Y \mid \lambda(y) > 0\}$ . Par négation de proposition 3.2-(ii) appliqué à  $K$  :

$$\forall x^* \in S, \exists x \in S : F(x) \prec_K F(x^*)$$

Autrement dit puisque  $K \setminus l(K) = D$  :

$$\forall x^* \in S, \exists x \in S : F(x^*) - F(x) \in D$$

Ainsi

$$F(S) = \bigcup_{x^* \in S} \{F(x^*)\} \subset \bigcup_{x \in S} (F(x) + D)$$

Or  $D = \lambda^{-1}(]0, +\infty[)$  étant ouvert de  $Y$  (car  $\lambda$  est continue) il en résulte que

$$\bigcup_{x \in S} (F(x) + D)$$

est un recouvrement ouvert de  $F(S)$ . Etant donné que  $F$  est continue de  $X$  sur  $Y$  et  $S$  compact, la compacité de  $F(S)$  implique l'existence d'un sous ensemble  $T$  de  $S$ ,  $T$  fini tel que

$$F(S) \subset \bigcup_{x \in T} (F(x) + D)$$

En particulier :

$$F(T) \subset \bigcup_{x \in T} (F(x) + D)$$

Soit alors  $x_0 \in T$  :

- Pour  $x_0 \in T$ , il existe  $x_1 \in T$  tel que :  $F(x_0) \in (F(x_1) + D)$
- Pour  $x_1 \in T$ , il existe  $x_2 \in T$  tel que :  $F(x_1) \in (F(x_2) + D)$
- Pour  $x_2 \in T$ , il existe  $x_3 \in T$  tel que :  $F(x_2) \in (F(x_3) + D)$ . Et ainsi de suite...

On construit ainsi une suite  $(x_i)$  de  $T$  tel que :

$$\forall i \in \mathbb{N} : F(x_i) - F(x_{i+1}) \in D$$

Or comme  $T$  est fini, il existe au moins deux rangs différents de la suite dont les éléments correspondants soient égaux :

$$\exists i, j \in \mathbb{N}, i < j \text{ tel que } x_i = x_j$$

Posons  $l_k = F(x_k) - F(x_{k+1}) \in D$  pour  $k \in \{i, i+1, \dots, j-1\}$ . Par sommation sur  $k$ , et par linéarité de  $\lambda$  :

$$\lambda\left(\sum_{k=i}^{j-1} l_k\right) = \sum_{k=i}^{j-1} \lambda(l_k) > 0 \text{ donc } \sum_{k=i}^{j-1} l_k \in D$$

Cependant

$$\sum_{k=i}^{j-1} l_k = F(x_i) - F(x_{i+1}) + F(x_{i+1}) - \dots - F(x_{j-1}) + F(x_{j-1}) - F(x_j) = F(x_i) - F(x_j) = 0 \in D$$

Ce qui est contradiction avec  $0 \notin D$ . ■

Grâce à la proposition précédente ( $E_p \subset E \subset E_f$ ) et sous les hypothèses du théorème, les ensembles  $E$  et  $E_f$  sont non vides.

Pour bien comprendre comment se présentent les différentes solutions sur l'ensemble  $S$ , considérons l'exemple suivant :

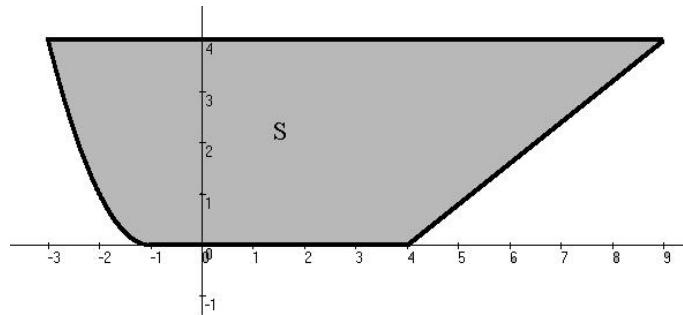
**Exemple 3.2.** Considérons  $X = Y = \mathbb{R}^2$  muni de la norme euclidienne et  $C = \mathbb{R}_+^2$ ,  $F$  l'application identité de  $\mathbb{R}^2$ . On considère aussi l'ensemble :

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) \leq y \leq 4\}$$

où  $f$  est la fonction (continue) définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si } x \leq -1 \\ 0 & \text{si } -1 \leq x \leq 4 \\ \frac{4x-16}{5} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Géométriquement, on obtient :



Existence de solutions :

Etant donné que :

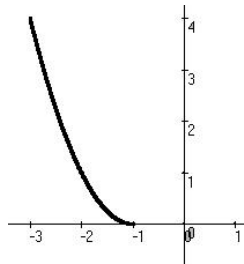
- $S$  est fermé<sup>1</sup>
- $S$  est borné (elle est contenue dans la boule de centre  $(0, 0)$  et de rayon 10 (voir figure))

$S$  est donc compact. De plus comme  $C$  est strictement supporté et  $F$  est continue de  $\mathbb{R}^2$  sur lui-même, alors

$$E \neq \emptyset$$

On va maintenant s'intéresser aux différents types de solutions. Pour chaque cas, il faut utiliser les caractéristiques géométriques de la solution recherchée. Dans chaque situation, nous nous contenterons uniquement de visualiser ce qui se passe géométriquement.

On va noter  $\Gamma := \{(x, (x+1)^2) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 \leq x \leq -1\}$ , ensemble correspondant à une partie de la frontière de  $S$  :



Solutions efficientes :

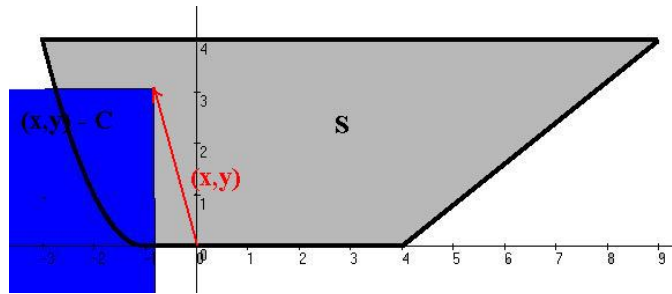
Puisque  $C$  est saillant, d'après proposition 3.2-(iii) (cas saillant), on cherche à déterminer l'ensemble :

$$\{(x, y) \in S \mid ((x, y) - C) \cap S = \{(x, y)\}\}$$

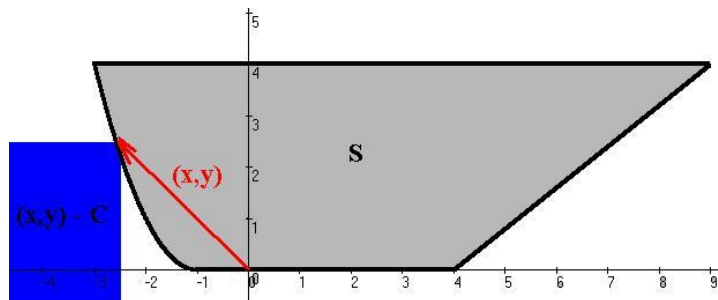
<sup>1</sup>Soient les applications  $\lambda_1, \lambda_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définies respectivement par  $\lambda_1(x, y) = f(x) - y$ ,  $\lambda_2(x, y) = y$ , pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . On a alors  $S = \lambda_1^{-1}(] - \infty, 0]) \cap \lambda_2^{-1}(] - \infty, 4])$ . La continuité de  $\lambda_1, \lambda_2$  impliquent que  $S$  est fermé.

Soit alors  $(x, y) \in S$ .

Si  $(x, y) \notin \Gamma$ , on obtient  $((x, y) - C) \cap S \neq \{(x, y)\}$  :



En revanche si  $(x, y) \in \Gamma$  alors  $((x, y) - C) \cap S = \{(x, y)\}$  :

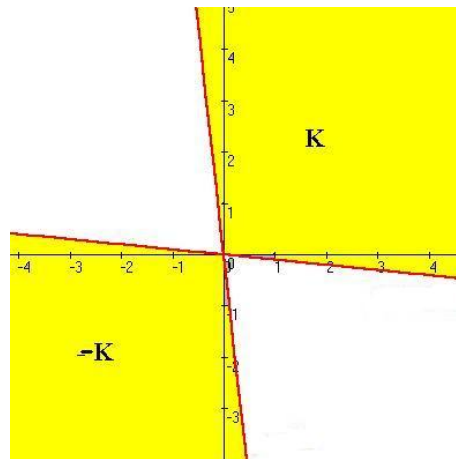


D'où  $E = \{(x, (x + 1)^2) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 \leq x \leq -1\}$

Solutions proprement efficaces :

Etant donné que  $E_p \subset E$ , il nous suffit donc de déterminer parmi les points  $(x, y) \in E$ , ceux pour lesquels on a  $(x, y) \in E_p$ . On envisage alors les deux cas suivants :

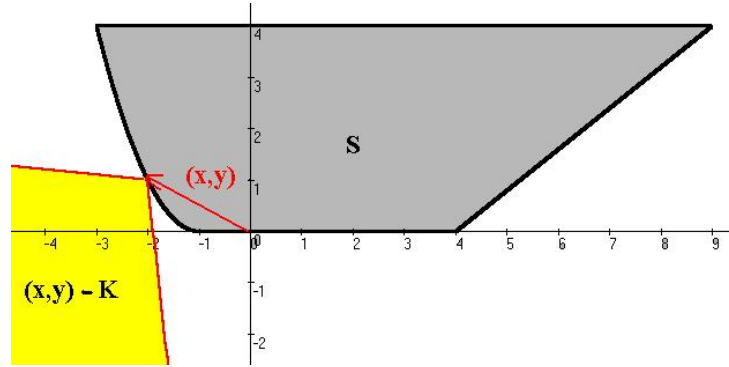
{a} Si  $(x, y) \in E \setminus \{(-1, 0)\}$ , on peut trouver un cône convexe  $K^2$



tel que  $K \neq Y$ ,  $C \setminus l(C) \subset \text{int } K$  et  $((x, y) - K) \cap S = \{(x, y)\}^3$ .

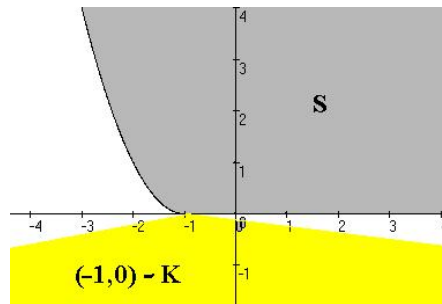
<sup>2</sup>prendre par exemple  $K = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v \geq 2(x + 1)u, v \geq 3(x + 1)u\}$

<sup>3</sup>de sorte que  $(x, y) \in E(X, S, Y, K, F)$

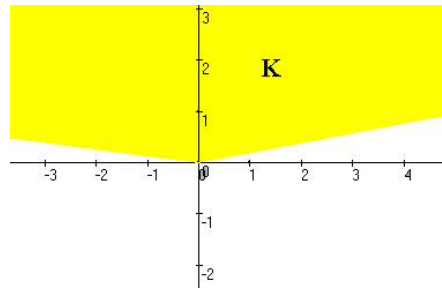


Ainsi  $(x, y) \in E_p$ .

{b} Si  $(x, y) = (-1, 0)$ , on ne peut pas trouver de cône  $K$  tel que  $(-1, 0) \in E_p$ . Par exemple en prenant un cône convexe  $K$  tel que  $(-1, 0) \in E(X, S, Y, K, F)$ , comme sur la figure ci-dessous :



$K$  ne vérifie pas que  $C \setminus l(C) \subset \text{int } K$  :



De ce fait,  $(-1, 0) \notin E_p(X, S, Y, C, F)$ . Ainsi  $E_p = \{(x, (x+1)^2) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 \leq x < -1\}$ .

Solutions faiblement efficaces :

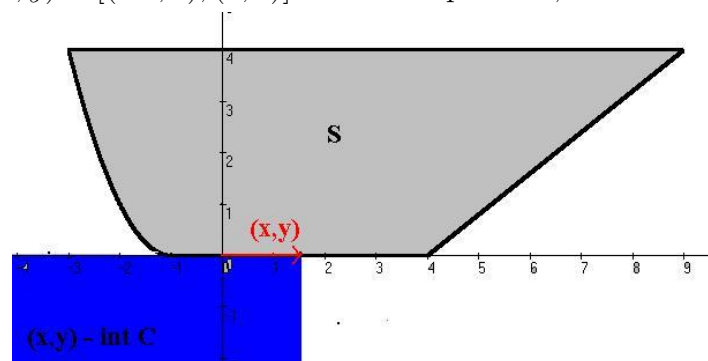
Soit  $(x, y) \in S$ .

Ici, nous allons utiliser la proposition 3.3 :  $(x, y) \in E_f \iff ((x, y) - \text{int } C) \cap F(S) = \emptyset$

Autrement dit, on souhaite déterminer l'ensemble

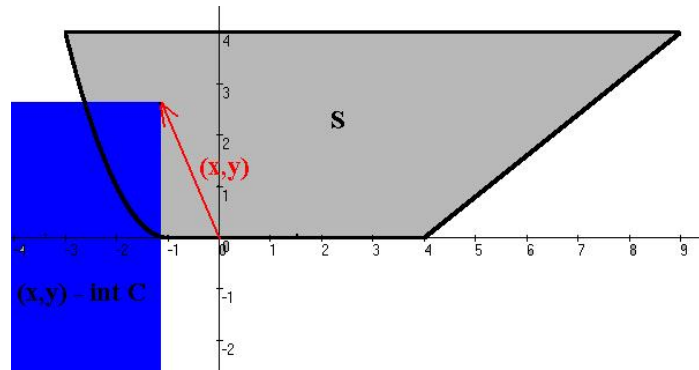
$$\{(a, b) \in S \mid ((a, b) - (\mathbb{R}_+^*)^2) \cap S = \emptyset\}$$

Comme  $E \subset E_f$  (cf. proposition 3.4), nous choisissons donc  $(x, y) \in S \setminus E = S \setminus \Gamma$ . Dans un premier temps, on considère  $(x, y) \in [(-1, 0); (4, 0)]$ . Géométriquement, on obtient :



de sorte que les ensembles  $(x, y) - \text{int } C$  et  $S$  ne se rencontrent pas.

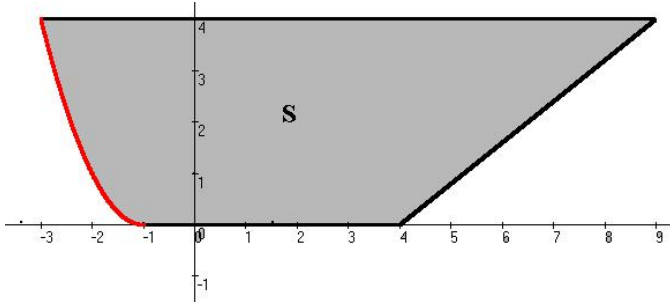
Dans le cas où  $(x, y) \in S \setminus (E \cup [(-1, 0); (4, 0)])$  l'intersection de  $(x, y) - \text{int } C$  et de  $S$  est non vide :



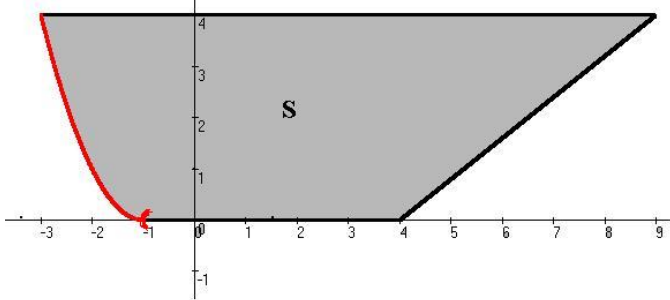
Ainsi  $E_f = \{(x, (x + 1)^2) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 \leq x \leq -1\} \cup [(-1, 0); (4, 0)]$

En résumé, les différents types de solutions se présentent donc ainsi :

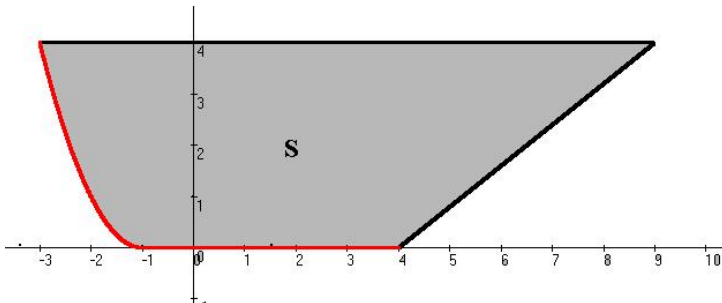
Solutions efficientes



Solutions proprement efficientes



Solutions faiblement efficientes



Sur cet exemple, par son aspect géométrique, il nous a été possible de trouver les solutions, puisque nous connaissions ce que valait géométriquement  $F(S)$  - ensemble que font intervenir les caractéristiques géométriques des solutions -. Mais bien souvent, deviner ce que vaut  $F(S)$  est assez difficile. Dans le prochain chapitre, nous verrons dans quelles conditions on peut résoudre un problème d'optimisation de manière analytique.



# Chapitre 4

## Scalarisation pour un problème convexe

La scalarisation est basée sur l'idée de remplacer un problème d'optimisation vectorielle par une famille de problèmes de minimisation scalaire - problème pour lequel nous disposons de techniques de résolution -. En seconde partie de ce chapitre, nous verrons un exemple de problème d'optimisation résolu grâce à la scalarisation.

### 4.1 Les outils de base pour la scalarisation

Dans cette section, nous énonçons les théorèmes importants que nous avons besoin pour les sections scalarisation et application. Nous ne fournirons donc aucune démonstration et admettrons les résultats énoncés.

#### 4.1.1 Le théorème de séparation géométrique de Hahn-Banach

Avant de donner le théorème, nous avons besoin de rappeler quelques définitions. Dans cette section,  $E$  désigne un evn.

**Définition 4.1.** On appelle **hyperplan** de  $E$  un ensemble de la forme

$$H = \{x \in E \mid f(x) = \alpha\}$$

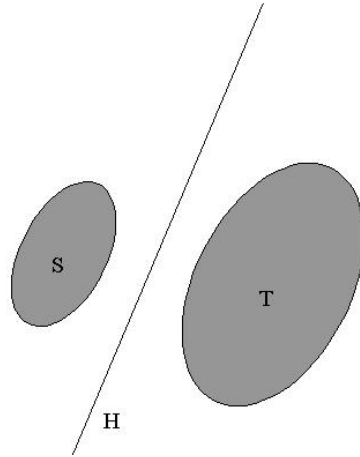
où  $f$  est une forme linéaire non identiquement nulle sur  $E$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Pour simplifier, on notera  $H = [f = \alpha]$ . Bien sûr,  $H$  est non vide, puisque  $f \neq 0$  il existe donc  $x \in E$  tel que  $f(x) \neq 0$  et  $y = \frac{\alpha}{f(x)}x \in H$ . Rappelons aussi qu'un hyperplan  $H$  est fermé si et seulement si  $f$  est continue. On a aussi besoin de la

**Définition 4.2.** Soient  $S$  et  $T$  deux parties de  $E$ . On dit que  $S$  et  $T$  sont **séparés** :

- **au sens large** par un hyperplan  $H = [f = \alpha]$  si  $S \subset H_- = [f \leq \alpha]$  et  $T \subset H_+ = [f \geq \alpha]$
- **au sens strict** s'il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $S \subset [f \leq \alpha - \epsilon]$  et  $T \subset [f \geq \alpha + \epsilon]$

Géométriquement, les ensembles  $S$  et  $T$  sont situés de part et d'autre de  $H$  :



Pour la preuve du théorème de scalarisation (voir plus loin), nous avons besoin de :

**Théorème 4.1.** Soit  $E$  un evn. Soient  $S \subset E, T \subset E$  deux ensembles convexes, non vides et disjoints. On considère l'un des deux cas suivants :

1. Si  $S$  est ouvert alors il existe un hyperplan fermé qui sépare  $S$  et  $T$  au sens large
2. Si  $S$  est fermé et  $T$  compact alors il existe un hyperplan fermé qui sépare  $S$  et  $T$  au sens strict.

#### 4.1.2 Le théorème de Karush-Kuhn-Tucker (cas scalaire)

Ce théorème est un cas particulier d'optimisation vectorielle, dit cas scalaire : la performance du problème est un réel. Notons juste au passage qu'il est une application du théorème de Hahn-Banach. On considère le cadre suivant :

Soit  $E$  un espace vectoriel,  $C \subset E$  un convexe non vide et un  $n$ -uplet de fonctions convexes  $f_i : C \rightarrow \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, n$  c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in C, \forall t \in [0, 1] : f_i(tx + (1-t)y) \leq tf_i(x) + (1-t)f_i(y)$$

L'ensemble admissible est :

$$S = \{x \in C \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : f_i(x) \leq 0\}$$

Le problème d'optimisation est  $(E, S, \mathbb{R}, \leq, f_0)$  ou écrit formellement :

$$\text{Min}_{x \in S} f_0(x)$$

Un point  $x^* \in S$  est appelé **solution optimale** si :

$$\forall x \in S : f_0(x^*) \leq f_0(x)$$

**Définition 4.3.** Le **Lagrangien** associé au problème  $(E, S, \mathbb{R}, \leq, f_0)$  est la fonction  $L : C \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in C, \forall \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n : L(x, \lambda) = f_0(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x)$$

Les nombres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  s'appellent les **multiplicateurs de Lagrange**.

On va aussi supposer l'hypothèse de Slater :

$$\exists \hat{x} \in C : f_i(\hat{x}) < 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

c'est-à-dire :

$$\bigcap_{i=1}^n [f_i < 0] \neq \emptyset$$

On a alors le

**Théorème 4.2.** Pour qu'un point  $x^* \in C$  soit solution optimale du problème  $(E, S, \mathbb{R}, \leq, f_0)$ , il faut et il suffit qu'il existe  $\lambda^* \in \mathbb{R}_+^n$  tel que  $(x^*, \lambda^*)$  soit un point-selle pour  $L$  :

$$\forall x \in C, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^n : L(x^*, \lambda) \leq L(x^*, \lambda^*) \leq L(x, \lambda^*)$$

Le couple  $(x^*, \lambda^*)$  vérifie alors la condition de **non rigidité complémentaire** :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^* f_i(x^*) = 0$$

Si on ajoute les hypothèses supplémentaires :

- $E$  est un evn.
- $C$  est ouvert
- les applications  $f_i$  sont dérivables (au sens de Fréchet) sur  $C$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

on obtient alors cette «version» du théorème de KKT :

**Théorème 4.3.** Sous les hypothèses précédentes, pour qu'un point  $x^* \in C$  soit solution optimale du problème  $(E, S, \mathbb{R}, \leq, f_0)$ , il faut et il suffit qu'il existe  $\lambda^* = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$  tel que :

$$\nabla f_0(x^*) = - \sum_{i=1}^n \lambda_i^* \nabla f_i(x^*)$$

et la condition de non rigidité complémentaire est vérifiée.

**Remarque 4.1.** Ce théorème est en fait la généralisation du théorème des extrémas liés (cf. Calcul différentiel). La différence est que :

- pour les extrémas liés, les contraintes  $f_i$  qui définissent  $S$  sont de types égalités :

$$S = \bigcap_{i=1}^{i=m} [f_i = 0]$$

- le théorème des extrémas liés ne fournit qu'une condition nécessaire sur l'extrémum  $x^*$  de la restriction de  $f_0$  à l'ensemble  $S$ .

## 4.2 Scalarisation d'un problème convexe

Revenons à notre problème  $(X, S, Y, C, F)$ . On rappelle que  $Y$  est un evn avec  $\|\cdot\|$  la norme dont est munie  $Y$  ( $Y^*$  son dual topologique). Le produit scalaire de dualité entre  $Y^*$  et  $Y$  sera noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$

**Définition 4.4.** Si  $C$  est un cône convexe de  $Y$ , l'ensemble

$$C^+ := \{\lambda \in Y^* \mid \langle \lambda, y \rangle \geq 0, \forall y \in C\}$$

s'appelle le **cône polaire de  $C$**  et l'ensemble

$$C_s^+ := \{\lambda \in Y^* \mid \langle \lambda, y \rangle > 0, \forall y \in C \setminus l(C)\}$$

s'appelle le **cône polaire strict de  $C$**

Avant d'énoncer le théorème on a besoin du lemme et des définitions suivants :

**Lemme 4.1.** Si  $C$  est un cône convexe tel que  $\text{int } C \neq \emptyset$  alors

$$\forall \lambda \in C^+ \setminus \{0\}, \forall y \in \text{int } C, \langle \lambda, y \rangle > 0 \quad (4.1)$$

Preuve :

Soit  $\lambda \in C^+ \setminus \{0\}$  et  $y \in \text{int } C$ . Soit  $H$  le noyau de la fonctionnelle linéaire et continue  $\lambda$ .

Etant donné que  $\forall x \in C, \langle \lambda, x \rangle \geq 0$  donc  $C \subset H^+ := \{z \in Y \mid \langle \lambda, z \rangle \geq 0\}$ . Par ailleurs il existe  $O$  ouvert de  $Y$  tel que  $y \in O \subset C$  donc  $y \in O \subset H^+$ . Ainsi  $y \in \text{int } H^+$ . Le reste de la démonstration résulte de la propriété suivante :

$$\text{int } H^+ = \{x \in Y \mid \langle \lambda, x \rangle > 0\}$$

Montrons d'abord que  $\forall x \in \text{int } H^+ : \langle \lambda, x \rangle > 0$ .

Soit  $x \in \text{int } H^+$ . Il existe  $r > 0$  tel que la boule ouverte  $x + rB$  de centre  $x$  et de rayon  $r$  soit incluse dans  $H^+$ . Raisonnons par l'absurde en supposant que  $\langle \lambda, x \rangle = 0$  c'est-à-dire que  $x \in H$ . Soit alors  $z \in B(x, r)$  tel que  $z \notin H$ . Ainsi  $\langle \lambda, z \rangle > 0$ . Il existe  $h \in B$  tel que  $z = x + rh$  donc  $\langle \lambda, h \rangle > 0$ . Or  $h \in B$  implique que  $-h \in B$  donc  $x - rh \in B(x, r)$  et  $\langle \lambda, x - rh \rangle < 0$  donc  $x - rh \in (H^+)^c$ . Ainsi  $B(x, r) \cap (H^+)^c \neq \emptyset$  ce qui contredit l'hypothèse  $B(x, r) \subset H^+$

Soit maintenant  $x \in H^+$  tel que  $\langle \lambda, x \rangle > 0$ . Comme  $\lambda$  est continue donc  $\lambda^{-1}(]0, +\infty])$  est un ouvert. Il existe donc  $r > 0$  tel que  $x \in (x + rB) \subset \lambda^{-1}(]0, +\infty]) \subset H^+$  donc  $x \in \text{int } H^+$ . ■

On rappelle aussi le résultat topologique suivant :

Soit  $K \subset Y$ , un ensemble convexe tel que  $\text{int } K \neq \emptyset$  alors :

$$\overline{K} \text{ et } \text{int } K \text{ sont convexes et } \overline{\text{int } K} = \overline{K} \quad (4.2)$$

Preuve :

•  $\overline{K}$  est convexe :

Soient  $x, y \in \overline{K}$  et  $t \in [0, 1]$ . Il existe donc deux suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  de  $K$  tel que  $x_n \rightarrow x$  et  $y_n \rightarrow y$ . On vérifie alors aisément que la suite  $n \mapsto z_n = tx_n + (1-t)y_n$  est une suite de  $K$  convergent vers  $z = tx + (1-t)y$ .

Pour le reste de la démonstration, on a besoin d'établir la propriété suivante :

$$\forall x \in \text{int } K, \forall y \in \overline{K}, [x, y[ := \{tx + (1-t)y \mid t \in ]0, 1[ \} \subset \text{int } K \quad (4.3)$$

Soit donc  $x \in \text{int } K, y \in \overline{K}$ , et  $z = (1-t)x + ty$  avec  $t \in ]0, 1[$ . Il existe donc  $O$  ouvert tel que  $x \in O \subset K$ . L'homothétie  $h_{z, \lambda}$  de centre  $z$  et de rapport  $\lambda = \frac{t-1}{t} \in ]-1, 0[$  c'est-à-dire :

$$h_{z, \lambda} : w \mapsto h_{z, \lambda}(w) = z + \lambda(w - z)$$

est un homéomorphisme de  $Y$  dans  $Y$ . En particulier c'est une application ouverte. Elle transforme donc l'ouvert  $O$  contenant  $x$  en un ouvert  $O'$  contenant  $h_{z, \lambda}(x) = (1-t)x + ty + \frac{t-1}{t}(x - (1-t)x - ty) = (1-t)x + ty + \frac{t-1}{t}(x - (1-t)x - ty)$

$t)x - ty) = y$ . De plus, comme  $y \in \overline{K}$  donc  $O' \cap K \neq \emptyset$ . Ainsi il existe  $u \in O' \cap K$  en particulier  $u \in O'$ . Or comme  $h_{z,\lambda}$  est un homéomorphisme (en particulier elle est bijective), il existe donc  $v \in O$  tel que  $h_{z,\lambda}(v) = u$ . Ainsi  $u = z + \lambda(v - z)$  c'est-à-dire  $z = u - \frac{\lambda}{1-\lambda}(v - u)$ . Posons  $\mu = -\frac{\lambda}{1-\lambda} \in ]0, 1[$  (car  $\lambda \in ]-1, 0[$ ). De ce fait, l'homothétie  $h_{u,\mu}$  de centre  $u$  et de rapport  $\mu$  transforme  $v$  en  $z$ , c'est-à-dire  $h_{u,\mu}(v) = z$ . Mais comme  $O$  est un ouvert contenant  $v$ ,  $h_{u,\mu}(O)$  est un ouvert contenant  $z = u + \mu(v - u) \in K$ . Soit alors  $w \in O$ . Grâce à la convexité de  $K$ , on obtient :  $h_{u,\mu}(w) = u + \mu(w - u) \in K$ . Donc  $h_{u,\mu}(O) \subset K$ . D'où  $z \in \text{int } K$

• int  $K$  est convexe :

Soient  $x, z \in \text{int } K$ . En prenant  $z$  à la place de  $y$  dans (4.3) on a donc  $[x, z[ \subset \text{int } K$ . Ainsi  $[x, z] = [x, z[ \cup \{z\} \subset \text{int } K$

• pour  $\overline{\text{int } K} = \overline{K}$  :

Etant donné que  $\text{int } K \subset K$  donc  $\overline{\text{int } K} \subset \overline{K}$ , il faut établir l'autre inclusion. Soit donc  $x \in \overline{K}$ . Comme  $\text{int } K \neq \emptyset$  il existe  $x_0 \in \text{int } K$ . Pour tout  $n \geq 1$ , on pose  $x_n = \frac{1}{n}x_0 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)x$ . Ainsi d'après la propriété (4.3) pour tout  $n \geq 1$ , on a  $x_n \in [x_0, x[ \subset \text{int } K$ . De plus on a :

$$\forall n \geq 1 : \|x - x_n\| = \frac{1}{n}\|x - x_0\| \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty$$

La suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  est une suite de  $\text{int } K$  convergeant vers  $x$ . Ainsi  $x \in \overline{\text{int } K}$  d'où l'inclusion. ■

**Définition 4.5.** Soient

- $X$  et  $Y$  deux evn,
- $C \subset Y$  un cône convexe,
- $S \subset X$  une partie convexe.

Une application  $F : S \longrightarrow Y$  s'appelle **C-convexe** si

$$\forall x, x' \in S, \forall t \in [0, 1], \quad F(tx + (1-t)x') \preceq tF(x) + (1-t)F(x')$$

Notons aussi que si  $F$  est  $C$ -convexe alors  $F(S) + C$  est un ensemble convexe<sup>1</sup>.

**Définition 4.6.** Sous les hypothèses que  $S \subset X$  est convexe,  $C \subset Y$  est convexe et  $F$  est  $C$ -convexe, le problème d'optimisation  $(X, S, Y, C, F)$  s'appelle **problème d'optimisation convexe**, noté **POC**.

Par exemple, le problème posé dans le cadre du théorème de Karush-Khun-Tucker est un POC.

Le théorème de scalarisation est le suivant

<sup>1</sup>En effet, soient  $y_1, y_2 \in F(S) + C$  et  $t \in [0, 1]$ . Ainsi  $y_1 = F(x_1) + c_1$  et  $y_2 = F(x_2) + c_2$  avec  $x_1, x_2 \in S$  et  $c_1, c_2 \in C$ . Par ailleurs la  $C$ -convexité de  $F$  implique que :

$$tF(x_1) + (1-t)F(x_2) - F(tx_1 + (1-t)x_2) \in C$$

La convexité de  $S$  implique que  $x_3 := tx_1 + (1-t)x_2 \in S$ . Donc il existe  $c \in C$  tel que  $tF(x_1) + (1-t)F(x_2) - F(x_3) = c$  autrement dit  $tF(x_1) + (1-t)F(x_2) = F(x_3) + c$  donc  $tF(x_1) + (1-t)F(x_2) \in F(S) + C$ . Et on obtient :  $ty_1 + (1-t)y_2 = tF(x_1) + (1-t)F(x_2) + tc_1 + (1-t)c_2 = F(x_3) + c + tc_1 + (1-t)c_2$  donc  $ty_1 + (1-t)y_2 \in F(S) + C + C \subset F(S) + C$  car  $C$  étant convexe :  $C + C \subset C$ . D'où la convexité de  $F(S) + C$

**Théorème 4.4 (Scalarisation pour un POC).** Soient  $X$  et  $Y$  deux evn ,  $S \subset X$  une partie non vide convexe,  $C \subset Y$  un cône convexe,  $F : S \longrightarrow Y$  une application  $C$ -convexe. Alors :

(i) Si  $C$  est saillant, on a

$$E_p(X, S, Y, C, F) = \bigcup_{\lambda \in C_s^+} \operatorname{argmin}_{x \in S} \langle \lambda, F(x) \rangle \quad (4.4)$$

(ii) Si  $\operatorname{int} C \neq \emptyset$ , on a

$$E_f(X, S, Y, C, F) = \bigcup_{\lambda \in C^+ \setminus \{0\}} \operatorname{argmin}_{x \in S} \langle \lambda, F(x) \rangle \quad (4.5)$$

Preuve :

Pour (4.4) : Ici, nous allons supposer que le cône  $C$  est donc saillant.

(a) Commençons par établir l'inclusion

$$\left( \bigcup_{\lambda \in C_s^+} \operatorname{argmin}_{x \in S} \langle \lambda, F(x) \rangle \right) \subset E_p(X, S, Y, C, F)$$

Soit donc  $\lambda \in C_s^+$  et soit  $x^* \in \operatorname{argmin}_{x \in S} \langle \lambda, F(x) \rangle$  autrement dit :  $\forall x \in S, \langle \lambda, F(x^*) \rangle \leq \langle \lambda, F(x) \rangle$  et  $x^* \in S$ . Considérons l'ensemble suivant :

$$K := \operatorname{int} H^+ \cup \{0\} = \{x \in Y \mid \langle \lambda, x \rangle > 0\} \cup \{0\}$$

où  $H^+$  a été définie dans la preuve du lemme. On vérifie aisément que

- $K$  est un cône convexe saillant, il suffit d'appliquer la proposition 3.1-(3.3) au cône convexe  $H^+$ .
- $K \neq Y$
- par définition de  $\lambda$  que  $C \setminus \{0\} \subset \operatorname{int} K$

S'il existe  $x \in S$  tel que  $F(x) \prec_K F(x^*)$  alors  $\langle \lambda, F(x^*) - F(x) \rangle > 0$  ce qui contredit le choix de  $x^*$ . Ainsi en appliquant la proposition 3.2 au cône  $K$ , on a  $x^* \in E(X, S, Y, K, F)$ . Il en résulte que  $x^* \in E_p(X, S, Y, C, F)$ .

(b) On va maintenant établir que

$$E_p(X, S, Y, C, F) \subset \left( \bigcup_{\lambda \in C_s^+} \operatorname{argmin}_{x \in S} \langle \lambda, F(x) \rangle \right)$$

Soit donc  $x^* \in E_p(X, S, Y, C, F)$ . Par définition, il existe donc un cône convexe  $K \neq Y$ , tel que  $C \setminus \{0\} \subset \operatorname{int} K$  et  $x^* \in E(X, S, Y, K, F)$ . Comme  $F(S) + C$  est un ensemble convexe, on montre alors facilement que  $F(S) + K$  est convexe.

Par ailleurs, notons que grâce à la proposition 3.4 appliqué au cône convexe  $K$  on a :  $x^* \in E_f(X, S, Y, K, F)$ . De ce fait, en appliquant la proposition 3.3 à  $K$ , il résulte que les ensembles  $(F(x^*) - \operatorname{int} K)$  et  $F(S)$  sont disjoints. Mais comme  $K$  est convexe tel que  $K \neq Y$  donc  $\operatorname{int} K + K \subset \operatorname{int} K$ . Ainsi les ensembles convexes  $F(x^*) - \operatorname{int} K$  et  $F(S) + K$  sont disjoints et comme le premier ensemble est ouvert et non vide ( $C \setminus \{0\} \subset \operatorname{int} K$ ), on peut appliquer le théorème de séparation de Hahn-Banach. Il existe donc  $\lambda \in Y^* \setminus \{0\}$  tel que :

$$\forall c \in \operatorname{int} K, \forall x \in S, \forall z \in K : \langle \lambda, F(x^*) - c \rangle \leq \langle \lambda, F(x) + z \rangle$$

Puisque  $0$  est un point adhérent de  $\text{int } K$  (car en appliquant (4.2) au cône convexe  $K$  on a  $0 \in K \subset \overline{K} = \overline{\text{int } K}$ ) on peut donc faire tendre  $c \in \text{int } K$  vers  $0$  et en prenant  $z = 0 \in K$  on obtient :

$$\forall x \in S : \quad \langle \lambda, F(x^*) \rangle \leq \langle \lambda, F(x) \rangle$$

donc  $x^* \in \underset{x \in S}{\text{argmin}} \langle \lambda, F(x) \rangle$ . De plus en prenant  $x = x^*$  et  $z = 0$  dans l'inégalité de séparation on obtient :

$$\forall c \in \text{int } K, \quad \langle \lambda, c \rangle \geq 0$$

Alors d'après (4.2) en prenant  $c \in K \subset \overline{K} = \overline{\text{int } K}$  et en choisissant une suite  $(c_n)_{n \geq 0}$  tel que  $c_n \in \text{int } K$  et  $c_n \rightarrow c$  et comme  $\lambda$  est continue ( $\langle \lambda, c_n \rangle \rightarrow \langle \lambda, c \rangle$ ) on obtient :  $\langle \lambda, c \rangle \geq 0$ . Donc

$$\forall c \in K, \quad \langle \lambda, c \rangle \geq 0$$

d'où  $\lambda \in K^+ \setminus \{0\}$

Il reste à montrer que  $\lambda \in C_s^+$ . Raisonnons donc par l'absurde en supposant que cela ne soit pas le cas. De ce fait il existe  $y \in C \setminus \{0\}$  (car  $C$  saillant donc  $l(C) = \{0\}$ ) tel que  $\langle \lambda, y \rangle = 0$  Mais alors  $y \in \text{int } K$  ( puisque  $C \setminus l(C) \subset \text{int } K$  ). Il existe alors  $B$  boule ouverte de centre  $0$  et de rayon  $r$  tel que  $y + B \subset K$ . Soit  $h \in B$ . On a  $\langle \lambda, y + h \rangle = \langle \lambda, h \rangle \geq 0$  Mais  $-h \in B$  donc  $\langle \lambda, -h \rangle \geq 0$ . On a donc  $\forall h \in B, \langle \lambda, h \rangle = 0$ . Ceci implique que pour tout  $z \in Y$  on a  $\langle \lambda, z \rangle = 0$ . En effet pour tout  $z \in Y$  la continuité en  $0 \in \mathbb{R}$  de l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow Y, t \mapsto tz$  entraîne comme  $B$  est voisinage ouvert de  $0$ , l'existence d'un nombre  $\beta > 0$  de sorte que  $]-\beta, \beta[$  voisinage de  $0 \in \mathbb{R}$  vérifie  $f(]-\beta, \beta[) \subset B$ . En choisissant  $0 < t < \beta$  on a donc  $f(t) = tz \in B$ . Dans ce cas  $\langle \lambda, z \rangle = \frac{1}{t} \langle \lambda, tz \rangle = 0$ . Ce qui contredit  $\lambda \neq 0$

Pour (4.5) : Maintenant, nous allons supposer que le cône  $C$  est d'intérieur non vide.

(c) Établissons maintenant que

$$\left( \bigcup_{\lambda \in C^+ \setminus \{0\}} \underset{x \in S}{\text{argmin}} \langle \lambda, F(x) \rangle \right) \subset E_f(X, S, Y, C, F)$$

Soit donc  $\lambda \in C^+ \setminus \{0\}$ . Étant donné que pour le cône convexe saillant  $C_f$  ( voir proposition 3.1-(3.3) ) on a  $C_f \setminus l(C_f) = \text{int } C$  alors d'après le lemme 4.1 on a  $\lambda \in (C_f)_s^+$ . Ainsi en prenant  $C_f$  à la place de  $C$  dans la partie (a) on obtient :

$$\underset{x \in S}{\text{argmin}} \langle \lambda, F(x) \rangle \subset E_p(X, S, Y, C_f, F)$$

Or  $E_p(X, S, Y, C_f, F) \subset E(X, S, Y, C_f, F) = E_f(X, S, Y, C, F)$  (voir remarque 3.4)

(d) Montrons pour finir que

$$E_f(X, S, Y, C, F) \subset \left( \bigcup_{\lambda \in C^+ \setminus \{0\}} \underset{x \in S}{\text{argmin}} \langle \lambda, F(x) \rangle \right)$$

Soit donc  $x \in E_f(X, S, Y, C, F)$  donc d'après la proposition 3.3  $(F(x^*) - \text{int } C)$  et  $F(S)$  sont disjoints. Mais d'après la proposition 3.1-(3.1) comme  $\text{int } C + C \subset \text{int } C$  et en utilisant (d) les ensembles  $(F(x^*) - \text{int } C)$  et  $F(x^*) + C$  sont convexes disjoints et  $(F(x^*) - \text{int } C)$  est ouvert. Pour monter l'existence de  $\lambda \in C^+ \setminus \{0\}$  tel que  $x^* \in \underset{x \in S}{\text{argmin}} \langle \lambda, F(x) \rangle$ , il suffit de reprendre la partie

(b) en prenant alors  $C = K$  à partir de *on peut donc appliquer le théorème de Hahn-Banach ...* jusqu'à ...  $\lambda \in K^+ \setminus \{0\}$ . ■

Pour un POC, la recherche de solution proprement, faiblement efficiente revient donc à une famille de problèmes de minimisation scalaire (dont on sait trouver des solutions grâce au théorème de Karush-Kuhn-Tucker). La prochaine section de ce chapitre est consacrée à la résolution d'un POC classique. Avant de continuer, nous avons besoin de la :

**Proposition 4.1.** Soit  $Y = \mathbb{R}^n$  et  $C = \mathbb{R}_+^n$  le cône de Pareto. Si on identifie  $Y^* = Y$  on a alors :

$$C^+ = C \text{ et } C_s^+ = \text{int } C$$

Preuve :

•  $C^+ = C$  :

Comme  $Y^* = Y$  alors

$$C^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle \geq 0, \forall y \in C\}$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire usuel de  $Y$ .

L'inclusion  $C \subset C^+$  est immédiate. Réciproquement si par l'absurde  $C^+ \setminus \{0\} \not\subset C$  alors soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in C^+ \setminus \{0\}$ . Comme  $x \notin C$  alors il existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $x_i < 0$ . Or si on prend  $y = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in C$  avec  $y_i = 1$ , on a  $\langle x, y \rangle = x_i < 0$ . Ce qui est en contradiction avec  $x \in C^+ \setminus \{0\}$ . Donc  $C^+ \setminus \{0\} \subset C$  et comme  $0 \in C^+ \cap C$  d'où l'inclusion  $C^+ \subset C$

•  $C_s^+ = \text{int } C$  :

Commençons par établir l'inclusion  $\text{int } C \subset C_s^+$ .

Comme  $Y^* = Y$  et  $C$  est saillant alors :

$$C_s^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle > 0, \forall y \in C \setminus \{0\}\}$$

De plus on montre facilement que

$$\text{int } C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0 \text{ pour } i = 1, \dots, n\}$$

Et on a aussi :

$$y \in C \setminus \{0\} \iff y \in C \text{ et il existe } k \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que } y_k > 0$$

Soit alors  $x \in \text{int } C$ . Pour tout  $y \in C \setminus \{0\}$  on a :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j \geq x_k y_k > 0$$

Donc  $\text{int } C \subset C_s^+$ . Réciproquement soit  $x \in C_s^+$ . Si par l'absurde  $x \notin \text{int } C$  alors il existe  $k \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $x_k \leq 0$ . Or si on prend  $y = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in C \setminus \{0\}$  avec  $y_k = 1$ , on a alors  $\langle x, y \rangle = x_k y_k = x_k \leq 0$ . Ce qui contredit  $x \in C_s^+$ . On a donc  $C_s^+ \subset \text{int } C$ . ■

Nous avons aussi besoin de la :

**Proposition 4.2.** Si  $F$  est  $C$ -convexe alors pour tout  $\lambda \in C^+$ , la fonction réelle  $x \mapsto \langle \lambda, F(x) \rangle$  est convexe sur  $S$ .

Preuve :

Soit donc  $\lambda \in C^+$ . Soit  $x, y \in S$  et  $t \in [0, 1]$ . La  $C$ -convexité de  $F$  implique que

$$a = tF(x) + (1-t)F(y) - F(tx + (1-t)y) \in C$$

Comme  $\lambda \in C^+$  alors  $\langle \lambda, a \rangle \geq 0$ , donc par linéarité de  $\lambda$  on a :

$$\langle \lambda, tF(x) + (1-t)F(y) \rangle = t\langle \lambda, F(x) \rangle + (1-t)\langle \lambda, F(y) \rangle \geq \langle \lambda, F(tx + (1-t)y) \rangle$$

D'où la convexité de  $x \mapsto \langle \lambda, F(x) \rangle$ . ■



## 4.3 Application : Etude d'un problème

### 4.3.1 Les données du problème.

Pour notre problème on va poser :

- $X = \mathbb{R}^p$  muni d'une de ces normes usuelles.
- $Y = \mathbb{R}^n$  muni d'une de ces normes usuelles.
- $C = \mathbb{R}_+^n$  le cône de Pareto induisant la relation de préférence  $\preceq$  classique que nous avons déjà rencontré.

On considère aussi  $U \subset X$  un ouvert convexe non vide et un  $m$ -uplet de fonctions  $(f_1, \dots, f_m)$  tel que  $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  convexe et différentiable pour tout  $i = 1, \dots, m$ . On définit alors

$$S = \bigcap_{i=1}^m [f_i \leq 0]$$

On va aussi supposer que (hypothèse de Slater) :

$$\bigcap_{i=1}^m [f_i < 0] \neq \emptyset$$

et

- $F : U \rightarrow Y$  une application  $C$ -convexe différentiable .

Notons que comme les fonctions  $f_i$  sont convexes alors les ensembles de sous-niveaux  $[f_i \leq 0]$  sont aussi convexes. Par intersection sur  $i$ ,  $S$  est donc convexe.  $F$  est donc  $C$ -convexe sur  $S \subset U$ . De plus étant donné que  $C$  est un cône convexe saillant d'intérieur non vide on peut donc appliquer le théorème de scalarisation.

Etant donné que pour toute application  $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ , on a :  $\forall \alpha > 0$ ,  $\operatorname{argmin} g = \operatorname{argmin} (\alpha g)$ , alors pour tout  $\lambda \in C^+ \setminus \{0\}$ , (en prenant  $\alpha = \frac{1}{\|\lambda\|}$  où  $\|\lambda\| = \sup_{x \in Y, \|x\|=1} |\langle \lambda, x \rangle|$ ), les problèmes scalaires

$$(P_\lambda) : \operatorname{Min}_{x \in S} \langle \lambda, F(x) \rangle$$

et

$$(P'_\lambda) : \operatorname{Min}_{x \in S} \left\langle \frac{\lambda}{\|\lambda\|}, F(x) \right\rangle$$

sont équivalents. En particulier puisque pour  $(P'_\lambda)$  on a  $\left\| \frac{\lambda}{\|\lambda\|} \right\| = 1$  on peut donc prendre  $\lambda \in C^+$  (respectivement  $\in C_s^+$ ) de norme 1 c'est-à-dire  $\lambda \in \partial B$  où  $B = \{x \in Y^* \mid \|x\| \leq 1\}$  est la boule unité de  $Y^*$ .

En identifiant  $Y^* = Y$  la proposition 4.1 nous permet donc de remplacer  $C^+ \setminus \{0\}$  (respectivement  $C_s^+$ ) par  $C \cap \partial B$  (respectivement  $\operatorname{int} C \cap \partial B$ ) où  $\partial B$  est la sphère unité de  $Y$ . De ce fait on choisira :

- pour les solutions faiblement efficaces  $\lambda \in C \cap \partial B$
- pour les solutions proprement efficaces  $\lambda \in \operatorname{int} C \cap \partial B$ .

De plus puisque  $F$  est différentiable et que  $\lambda$  est différentiable (car linéaire) alors par composition de fonctions différentiables et grâce à la proposition 4.2, la fonction  $x \mapsto \langle \lambda, F(x) \rangle$  est convexe différentiable sur  $S \subset U$ . On peut donc appliquer le théorème de Karush-Kuhn-Tucker au problème  $P_\lambda$ . On obtient la solution faiblement ou proprement efficiente recherchée. Le principe de résolution est donc le suivant :

1. vérifier les hypothèses du théorème de scalarisation :
  - $S$  est convexe.

–  $F$  est  $C$ -convexe.

2. vérifier que  $F$  et les  $f_i$  sont différentiables pour pouvoir appliquer le théorème de Karush-Kuhn-Tucker.

Pour bien comprendre l'importance des résultats énoncés ci-dessus, considérons l'exemple de POC qui suit. Nous aborderons tout d'abord sa résolution par la scalarisation puis de manière géométrique.

### 4.3.2 Exemple

Trouver les ensembles faiblement et proprement efficient du problème suivant :

Minimiser  $(x_1 + x_2, x_1 - x_2)$  sur l'ensemble

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

On a donc  $X = Y = \mathbb{R}^2$  avec  $C = \mathbb{R}_+^2$  le cône de Pareto. Munissons les espaces  $X, Y$  de la norme euclidienne (par exemple) de  $\mathbb{R}^2$ , noté  $\| \cdot \|_2$ .

#### (a) Résolution par scalarisation :

Les hypothèses du théorème 4.4 sont vérifiées :

- $F : (x_1, x_2) \mapsto F(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$  est  $\mathbb{R}_+^2$ -convexe. En effet, la fonction  $F$  est une application linéaire.
- $S$  est convexe car  $S = g^{-1}(] - \infty, 0])$  où  $g$  est la fonction convexe<sup>2</sup>  $(x_1, x_2) \mapsto g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$ .

On peut donc appliquer le théorème. Notons aussi que

$$\lambda \in \partial B \cap C^+ \iff \lambda = (\cos t, \sin t) \text{ avec } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (4.6)$$

et

$$\lambda \in \partial B \cap C_s^+ \iff \lambda = (\cos t, \sin t) \text{ avec } t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[ \quad (4.7)$$

#### Recherche de solutions faiblement efficientes

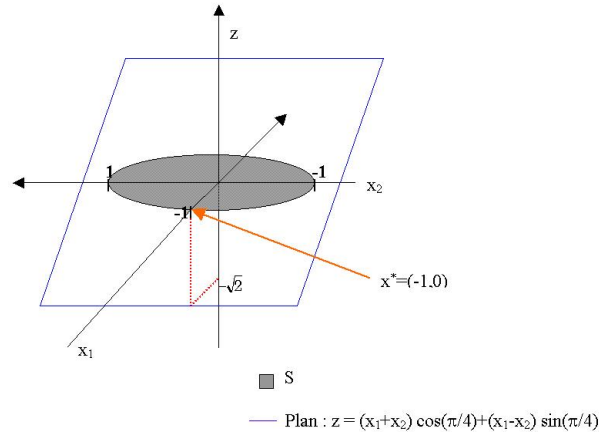
Grâce à la scalarisation et à (4.6), un point  $x^* = (x_1^*, x_2^*)$  est faiblement efficient ssi il existe  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  tel que

$$x^* \in \underset{(x_1, x_2) \in S}{\operatorname{argmin}} \underbrace{\left( (x_1 + x_2) \cos t + (x_1 - x_2) \sin t \right)}_{\langle \lambda, F(x_1, x_2) \rangle}$$

---

<sup>2</sup>il suffit de remarquer que  $g((x_1, x_2)) = \|(x_1, x_2)\|_2^2 - 1$ . La norme euclidienne de  $\mathbb{R}^2$  étant convexe, la fonction  $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 1$  étant croissante et convexe, on montre alors facilement par composition de fonctions que  $g$  est donc convexe.

Exemple pour  $t = \pi/4$



Puisque  $F$  est linéaire, elle est donc différentiable sur  $U = X$ . Alors d'après la proposition 4.2, l'application  $x \mapsto \langle \lambda, F(x) \rangle$  est convexe différentiable. On peut alors utiliser le théorème de Karush-Kuhn-Tucker pour  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$  fixé. Le Lagrangien associé est  $L : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$L(x_1, x_2, \mu) = ((x_1 + x_2) \cos t + (x_1 - x_2) \sin t) + \mu(x_1^2 + x_2^2 - 1), \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \forall \mu \in \mathbb{R}_+$$

Donc  $x^*$  est solution du problème ssi il existe  $\mu \in \mathbb{R}_+$  tel que

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \\ \text{condition de non rigidité : } \mu(x_1^{*2} + x_2^{*2} - 1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos t + \sin t + 2\mu x_1^* = 0 \\ \cos t - \sin t + 2\mu x_2^* = 0 \\ \mu(x_1^{*2} + x_2^{*2} - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mu x_1^* = -\frac{(\cos t + \sin t)}{2} & (C_1) \\ \mu x_2^* = -\frac{(\cos t - \sin t)}{2} & (C_2) \\ \mu(x_1^{*2} + x_2^{*2} - 1) = 0 & (C_3) \end{cases}$$

On a nécessairement  $\mu \neq 0$ . Sinon  $(C_1)$  impliquerait

$$\cos t = -\sin t$$

Or l'étude de la fonction  $[0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \cos u + \sin u$  garantit que celle-ci ne s'annule pas sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .  $(C_3)$  entraîne alors que  $x_1^{*2} + x_2^{*2} = 1$ .

Elevons alors  $(C_1)$  et  $(C_2)$  au carré et additionnons ces carrés :

$$\begin{aligned} \mu^2(x_1^{*2} + x_2^{*2}) &= \frac{(\cos t + \sin t)^2 + (\cos t - \sin t)^2}{4} \\ &= \frac{\overbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}^1 + \overbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}^1 + 2 \cos t \sin t - 2 \cos t \sin t}{4} \\ &= \frac{1}{2} \text{ donc } \mu^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Or comme  $\mu \geq 0$  donc  $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . En injectant cela dans  $(C_1)$  et  $(C_2)$  on obtient alors :

$$\begin{cases} x_1^* = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t + \sin t) \\ x_2^* = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t - \sin t) \end{cases}$$

La condition  $x_1^{*2} + x_2^{*2} = 1$  implique que  $(x_1^*, x_2^*)$  est un point du cercle unité de  $\mathbb{R}^2$ . Il existe donc  $\theta \in [0, 2\pi[$  tel que :

$$\begin{cases} \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t + \sin t) \\ \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t - \sin t) \end{cases}$$

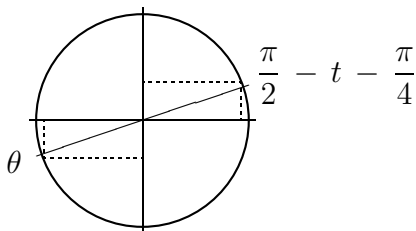
En utilisant les formules trigonométriques usuelles du type  $\cos(a+b)$  et  $\sin(a+b)$ , on a aussi

$$\begin{cases} \cos \theta = -\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \\ \sin \theta = -\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

Ou bien pour avoir des égalités entre deux cosinus et deux sinus :

$$\begin{cases} \cos \theta = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - t - \frac{\pi}{4}\right) \\ \sin \theta = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - t - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

A l'aide du cercle trigonométrique, on constate alors que les coordonnées des points  $(\cos \theta, \sin \theta)$  et  $(-\cos(\frac{\pi}{2} - t - \frac{\pi}{4}), -\sin(\frac{\pi}{2} - t - \frac{\pi}{4}))$  s'opposent :



D'où la relation  $\theta = \pi + \left(\frac{\pi}{2} - t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{4} - t$ .

Or  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  donc  $\theta \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ . On en déduit alors facilement que

$$E_f = \left\{ x = (\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \right\}$$

Recherche de solutions proprement efficaces :

Grâce à la scalarisation et à (4.7), il suffit de prendre  $t \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ . On applique alors la même technique précédente pour la recherche d'efficacité faible et on arrive à :

$$E_p = \left\{ x = (\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta \in \left[ \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right] \right\}$$

**(b) méthode géométrique**

Comme pour l'exemple 3.2, pour chaque cas (propre et faible) afin d'éviter des calculs fastidieux, nous nous contenterons de visualiser géométriquement l'ensemble des points efficaces (propre et faible) recherchés.

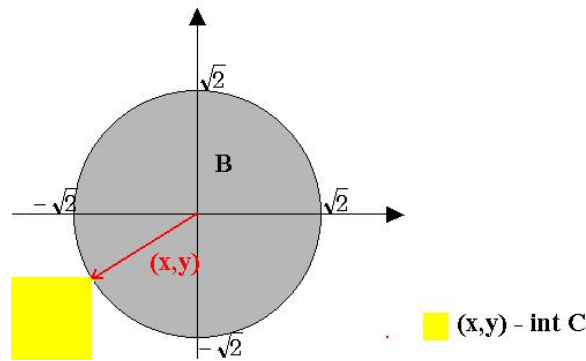
Avant de rechercher les solutions d'efficacité propre ou faible, notons que  $F(S)$  est la boule de centre  $(0, 0)$  et de rayon  $\sqrt{2}$  de  $\mathbb{R}^2$ . Notons  $B^3$  cette boule.

Solutions faiblement efficaces :

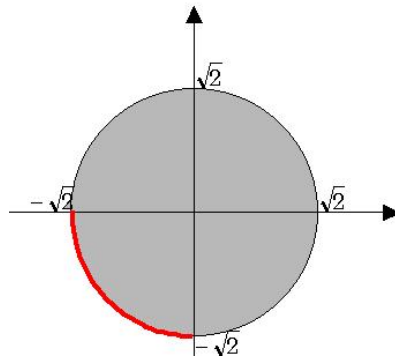
D'après la proposition 3.3, l'ensemble des points faiblement efficaces est

$$\{(x, y) \in F(S) \mid ((x, y) - (\mathbb{R}_+^*)^2) \cap F(S) = \emptyset\}$$

Géométriquement, pour un tel point  $(x, y) \in B$  on doit avoir :



autrement dit :



donc

$$E_f(F(S), C) = \left\{ \left( \sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t \right) \mid t \in \left[ \pi, \frac{3\pi}{2} \right] \right\}$$

<sup>3</sup>Pour établir l'inclusion  $F(S) \subset B$ , il suffit de considérer  $(x_1, x_2) \in S$ . Comme  $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$  on obtient alors  $\|F(x_1, x_2)\|_2^2 \leq 2$ . Pour établir l'inclusion  $B \subset F(S)$ , il suffit de considérer  $(x_1, x_2) \in B$ . On pose alors  $a = \frac{x_1 + x_2}{2}$  et  $b = \frac{x_1 - x_2}{2}$ . On obtient  $(x_1, x_2) = (a + b, a - b)$  et  $a^2 + b^2 \leq 1$ . Ainsi  $(a, b) \in S$  et  $F(a, b) = (x_1, x_2)$ .

Un élément  $(x_1, x_2) \in S$  sera donc solution faiblement efficiente si  $F(x_1, x_2) = (\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t)$  (avec  $t \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ ), autrement dit :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= \sqrt{2} \cos t \\ x_1 - x_2 &= \sqrt{2} \sin t \end{cases}$$

On en déduit les relations

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t = \cos \left(t - \frac{\pi}{4}\right) \\ x_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t = \sin \left(t - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

Comme  $t \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ , on obtient :

$$E_f(X, S, Y, C, F) = \left\{ (\cos \theta, \sin \theta) \mid \theta \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \right\}$$

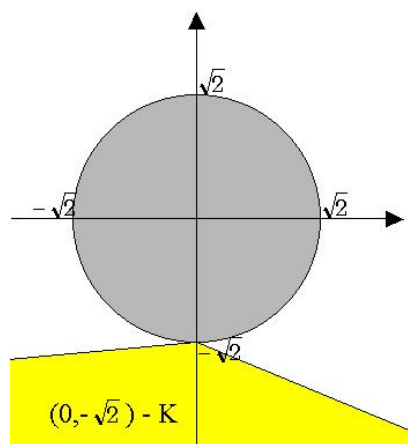
Solutions proprement efficientes :

Il faut commencer par déterminer  $E_p(F(S), C)$ . Comme  $E_p \subset E_f$  donc  $E_p(F(S), C) \subset E_f(F(S), C)$ . Or les points  $(x, y)$  de  $E_f(F(S), C)$  non proprement efficientes *i.e.* ceux pour lesquels il n'existe pas de cône convexe  $K$  tel que :

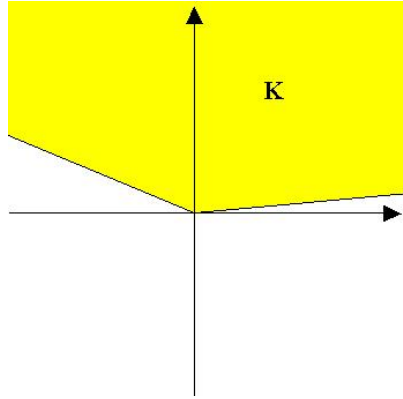
- $C \setminus l(C) \subset \text{int } K$
- $K \neq Y$  et
- $((x, y) - C) \cap F(S) \subset ((x, y) + l(K))$  (cf. proposition 3.2)

sont  $(-\sqrt{2}, 0)$ ,  $(0, -\sqrt{2})$

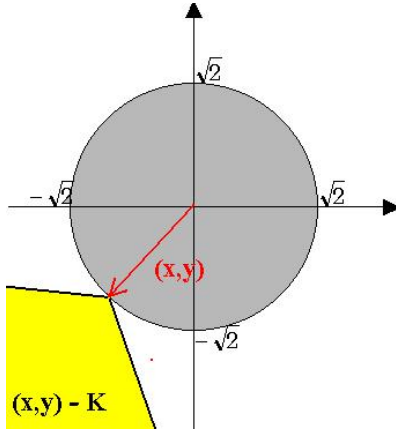
Géométriquement par exemple pour  $(x, y) = (0, -\sqrt{2})$ , quitte à prendre un cône  $K$  comme sur la figure ci-dessous,



on ne peut pas avoir  $C \setminus l(C) \subset \text{int } K$



Or pour  $(x, y) \in E_f(F(S), C) \setminus \{(-\sqrt{2}, 0), (0, -\sqrt{2})\}$ , on peut trouver un tel cône  $K$  :



Ainsi

$$E_p(F(S), C) = \left\{ \left( \sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t \right) \mid t \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[ \right\}$$

Comme pour les solutions d'efficacité faible, on en déduit facilement que

$$E_p(X, S, Y, C, F) = \left\{ (\cos \theta, \sin \theta) \mid \theta \in \left] \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right[ \right\}$$

### 4.3.3 Récapitulatif

Nous énonçons ici le résultat issu de la section 4.3.1. <sup>4</sup>

Soient  $n, p, m \in \mathbb{N}^*$ . On pose

$$\Lambda := \left\{ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{i=n} y_i^2 = 1 \right\}$$

la sphère unité de  $\mathbb{R}^n$ .

---

<sup>4</sup>Notons que l'on peut reprendre l'exemple de la section précédente et lui appliquer le théorème suivant, sans faire appel aux théorèmes de scalarisation et de Karush-Kukn-Tucker comme nous l'avons fait.

**Théorème 4.5.** Soient

- $X = \mathbb{R}^p$  muni d'une des normes usuelles
- $Y = \mathbb{R}^n$  muni d'une des normes usuelles
- $C = \mathbb{R}_+^n$
- $U \subset X$  un ouvert convexe non vide et un  $m$ -uplet de fonctions  $(f_1, \dots, f_m)$  tel que  $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  soit convexe différentiable pour  $i = 1, \dots, m$ . On définit aussi

$$S = \bigcap_{i=1}^{i=m} [f_i \leq 0]$$

- $F = (F_1, \dots, F_n) : U \rightarrow Y$  une application  $C$ -convexe, différentiable .

On va supposer que

$$\bigcap_{i=1}^{i=m} [f_i < 0] \neq \emptyset$$

Alors :

$x^* \in E_f(X, S, Y, C, F)$  (respectivement  $E_p(X, S, Y, C, F)$ ) si et seulement si il existe  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (C \cap \Lambda)$  (respectivement  $(\mathbb{R}_+^*)^n \cap \Lambda$ ) et il existe  $(\mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{R}_+^m$  tel que :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \frac{\partial F_i(x^*)}{\partial x_j} = - \sum_{i=1}^{i=m} \mu_i \frac{\partial f_i(x^*)}{\partial x_j} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

$$\mu_i f_i(x^*) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$$

Ce théorème est la généralisation du théorème de Karush-Kuhn-Tucker pour un problème d'optimisation ayant un nombre fini de critères.



# ANNEXE

# Annexe A

## Les grands personnages de l'optimisation vectorielle

Pour les lecteurs désireux de parfaire leur culture générale, nous consacrons ce chapitre aux différents acteurs qui ont contribué à l'optimisation vectorielle. A la suite de leur biographie, le lecteur trouvera les sources dont sont extraites les biographies.

### A.1 PARETO Vilfredo Federico Damaso(1848-1923)

Italien d'origine, on lui doit en outre la solution de Pareto, le cône de Pareto ...

#### A.1.1 sa biographie



Pareto naît à Paris, le 15 juillet 1848, fils du Marquis Raffaele Pareto, ingénieur civil, et de Marie Metenier, une Française d'origine modeste. La famille s'établit en Italie dès 1852, d'abord Gênes, où Raffaele enseigne le français, puis Casale Monferrato où il est nommé professeur à l'Ecole technique Leardi. Vilfredo y suit les cours de physique mathématique et étudie également le grec, le latin et l'italien. En 1862, la famille s'installe à Turin pour quelques mois, Raffaele ayant obtenu un mandat du Ministère de l'agriculture, et Vilfredo poursuit ses études à l'Institut polytechnique. En décembre, le père de Pareto obtient un poste à Florence, alors capitale de l'Italie. Vilfredo y obtient en 1864 le diplôme d'Ecole supérieure, avant d'être admis à l'Université de Turin où il s'inscrit en sciences mathématiques et physiques. Il publie en 1866 son premier article, *Applicazioni di disegno*, et obtient sa licence en septembre 1867. Deux mois plus tard, il entre à l'Ecole d'ingénieurs de Turin et obtient son diplôme en janvier

1870, avec la note maximale pour sa dissertation *Principii fondamentali della teoria della elasticità dei corpi solidi e ricerche fondamentali sulla integrazione delle equazioni differenziali che ne differiscono l'equilibrio*.

En 1877, Pareto est élu au Conseil communal de San Giovanni. Trois ans plus tard, il décide de se présenter à la Chambre des députés pour la circonscription de Montervarchi, mais il n'est pas élu. Il tentera nouveau de se faire lire en 1882, sans plus de succès.

En 1883, Pareto est nommé Chevalier de l'Ordre de la Couronne d'Italie, sur la proposition du

Ministère de l'agriculture, de l'industrie et du commerce.

En décembre 1889, il épouse la Comtesse Alessandrina (Dina) Bakounine, de descendance russe mais appartenant à une famille bien établie en Italie. Elle le quittera, onze ans plus tard, pour un jeune serviteur. Suite à ce départ, Pareto, qui vivait à Lausanne depuis 1893, décide de s'installer Céligny, dans le Canton de Genève, où le régime fiscal est moins sévère. Il y passera le reste de ses jours. En 1902, il rencontre une jeune française, Jeanne Régis, qui devient sa compagne et l'accompagnera jusqu'à sa mort.

Pareto a toujours fui les honneurs et n'aura été membre que d'une seule académie, l'Académie des sciences de Turin, refusant notamment de s'associer à l'Académie de Lincei. Il acceptera de soutenir la Commission de désarmement de la Ligue des Nations, mais ne participera à aucune session. Nous rappelons quand même le Jubilé de 1917 et en particulier le discours prononcé par V. Pareto à cette occasion.

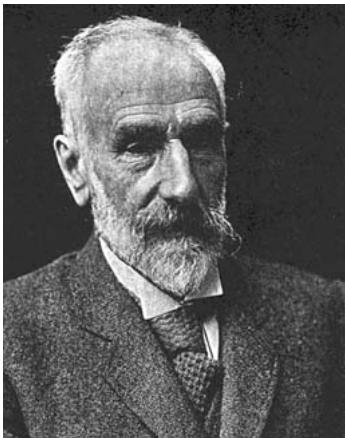
Il décède le 19 août 1923 d'une crise cardiaque, deux mois après s'être remarié avec Jeanne Régis. Il repose depuis lors au petit cimetière de Cligny.

Source Internet : <http://www.unil.ch/cwp/docs/Pbib1.html>

## A.2 EDGEWORTH Francis Isidoro (1845-1926)

Economiste britannique (1845-1926). Marginaliste, il a beaucoup travaillé la représentation mathématique des préférences humaines. On lui doit la notion de courbes d'indifférence.

### A.2.1 biographie



Francis Edgeworth came to study statistics after an education in ancient and modern languages. He entered Trinity College, Dublin at the age of 17 and studied French, German, Spanish and Italian. After graduating, he was awarded a scholarship to study at Oxford and he entered Exeter College in January 1867. At Oxford he spent some time at Magdalen and at Balliol, graduating in 1869. Exactly what Edgeworth did in the years after leaving Oxford is unclear. He must have studied law at some time since he was called to the Bar in 1877. Three years later, however, he was lecturing in logic at King's College, London. In 1888 he was appointed Professor of Political Economics at King's College, London and, two years later, he was appointed to the Tooke chair of Economic Science.

The surprising part is that somewhere in this varied career Edgeworth studied mathematics. We have to assume that he was self-taught in mathematics and this might explain why he seemed to believe that advanced mathematics was understood by all.

In 1881 he published *Mathematical Psychics : An Essay on the Application of Mathematics to the Moral Sciences*. This work, really on economics, looks at the *Economical Calculus* and the *Utilitarian Calculus*. He formulated mathematically a capacity for happiness and a capacity for work. His conclusions that women have less capacity for pleasure and for work than do men would not be popular in the 1990's. Edgeworth published *Methods of Statistics* in 1885 which presented an exposition of the application and interpretation of significance tests for the comparison of means. In 1891 Edgeworth left London to take up the Drummond Chair of Political Economy at Oxford. He obtained a fellowship at All Souls College and he held both the chair and the fellowship until he retired in 1922. Another event of significance in 1891 was that the *Economic Journal* began

publication with Edgeworth as its first editor. He continued to be editor until 1926 when Keynes took over the editorship.

In 1892 Edgeworth examined correlation and methods of estimating correlation coefficients in a series of papers. The first of these papers was Correlated Averages.

Edgeworth's work was to influence Pearson although bad feeling developed between the two and later Pearson was to deny Edgeworth's influence.

Source Internet : <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Edgeworth.html>

# Bibliographie

- [1] H. BONNEL, *Optimisation vectorielle*, Cours de Maîtrise, Université de Perpignan, 1997.
- [2] H. BONNEL, *Analyse fonctionnelle des équations aux dérivées partielles*, Cours de Maîtrise, Université de la Réunion, 2000.